1 Aufgabe 6.9

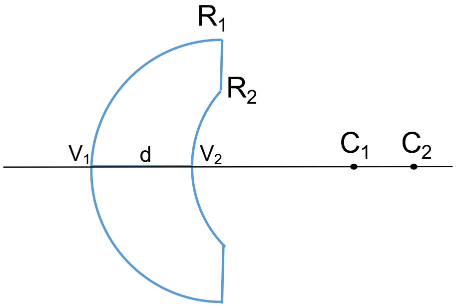

Figure 1: Dicke Linse mit R_1= +23 cm, R_2 = +20 cm, d = 9 cm und η=1.5.

Die Brennweite einer dicken Linse in Luft berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right] \\ \frac{1}{f} &= 0.5\left[\frac{1}{23} - \frac{1}{20} + \frac{0.5\cdot 9}{1.5\cdot 23\cdot 20}\right] = 0\,\mathrm{cm}^{-1} \\ f &= \infty\end{aligned}$$

wobei n der Brechungsindex der Linse und d die Dicke der Linse ist.

Für eine derartige afokale nicht-brechende Linse gilt: $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{d}{3}$:

$$\begin{aligned}(n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right] &= 0 \\ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2} &= 0 \\ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} &= -\frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \\ \frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} &= -\frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \\ R_1 - R_2 &= \frac{n-1}{n}d\end{aligned}$$

Wenn n= 1.5,

$$R_1 - R_2 = \frac{1}{3}d$$

2 Aufgabe 6.12

Die Hauptpunkte h_1 und h_2 und die Brennweiten stimmen überein, falls das Medium das die Linsen umgibt bevor und nach der Brechung die Gleichen sind. Die Hauptpunkte können

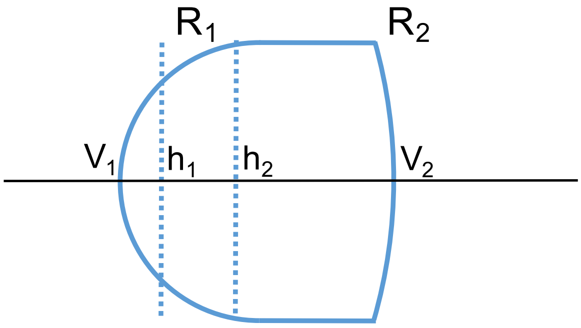

Figure 2: Bikonvexe Linse aus Kronglas mit R_1= +4 cm, R_2 = -15 cm, d = 4 cm und η=1.5.

berechnet werden, wenn man die Brennweite der dicken Linse kennt.

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= (n-1)\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right]\\ \frac{1}{f} &= 0.5\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{-15}+\frac{0.5\cdot 4}{1.5\cdot 4\cdot(-15)}\right]=0.147\,\mathrm{cm}^{-1}\end{aligned}$$

$$f = 6.8\,\mathrm{cm}$$

$$\begin{aligned}h_1 &= -\frac{f(n-1)d}{nR_2}=-\frac{6.8(0.5)4}{1.5(-15)}=+0.6\,\mathrm{cm}\\ h_2 &= -\frac{f(n-1)d}{nR_1}=-\frac{6.8(0.5)4}{1.5(4)}=-2.3\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

wobei h_1 positiv ist, weil er sich zur rechten des Vertex V_1 befindet und h_2 ist negativ, da er sich zur linken des Vertex V_2 befindet. Ein Schirm wird im Abstand von 1.00 m vom Vertex V_1 positioniert mit s_o=100.6 cm (Abstand von h_1). Es wird folglich abgebildet bei s_i:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}\\ \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{6.8}-\frac{1}{100.6}\end{aligned}$$

$$s_i = 7.3\,\mathrm{cm}$$

oder 5 cm von der Rückseite der Linse.

3 Aufgabe 6.16

Die Systemmatrix ergibt sich aus der Betrachtung der ersten Brechung an der ersten konvexen Oberfläche $\mathcal{R}_1$, Transmission des Lichts durch die Linse von der ersten zur zweiten Oberfläche

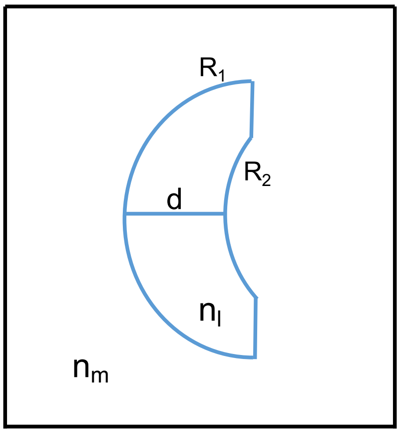

Figure 3: Dicke konvexe Linse mit (η_l=2.4; R_1= +50 mm, R_2 = +100 mm, d = 9.6 mm) in einem Medium mit Brechungsindex η_m=1.9.

$\mathcal{T}_2 1$ und der Brechung zwischen der zweiten konvexen Oberfläche der Linse und dem Medium $\mathcal{R}_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{R}_2\mathcal{T}_2 1\mathcal{R}_1 \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d/n_l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ die Stärken der brechenden Oberflchen sind, immer angegeben in [m^{-1}].

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \frac{\eta_l - \eta_m}{R_1} = \frac{2.4-1.9}{0.05} = +10\,\mathrm{m}^{-1} \\ \mathcal{D}_2 &= \frac{\eta_m - \eta_l}{R_2} = \frac{1.9-2.4}{0.1} = -5\,\mathrm{m}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 1 & +5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.004 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} 1.02 & -5.2 \\ 0.004 & 0.96 \end{bmatrix} \\ det|\mathcal{A}| &= 0.9792 + 0.0208 = 1 \end{aligned}$$

4 Aufgabe 6.20

Der Lösungsweg dieser Aufgabe ist gleich dem der vorangegangenen Aufgabe. Man muss nur beachten, dass in einer bikonvexen Linse der Radius der zweiten Oberfläche negativ ist. Ausgehend von der Stärke der Berechnung einer brechenden Oberfläche, welche sich in Luft befindet folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \frac{\eta_l - \eta_m}{R_1} = \frac{1.5-1}{0.5} = +1\,\mathrm{m}^{-1} \\ \mathcal{D}_2 &= \frac{\eta_m - \eta_l}{R_2} = \frac{1-1.5}{-0.25} = +2\,\mathrm{m}^{-1}\end{aligned}$$

Die Systemmatrix ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix}0.6 & -2.6\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix} \\ det|\mathcal{A}| &= 0.48 + 0.52 = 1\end{aligned}$$

5 Aufgabe 6.24

Durchquert man den Hohlraum zweimal, so folgt für die Systemmatrix:

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_1\mathcal{T}_{12}\mathcal{M}_2\mathcal{T}_{21}$$

wobei die Transfermatrix $\mathcal{T}_{21}$ in positiv ausgerichtet ist ($\mathcal{T}_{12}$ ist Gegenüber) und Matrix $\mathcal{M}_i$ stellt die Reflektion von Spiegel i dar.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{bmatrix}-1 & -2/r\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -d & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2/r\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ d & 1\end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix}-1 & -2/r\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -d & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1+2d/r & 2/r\\ d & 1\end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix}-1 & -2/r\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1+2d/r & 2/r\\ 2d-2d^2/r & -2d/r+1\end{bmatrix} \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix}1-6d/r+4d^2/r^2 & -4/r+4d/r^2\\ 2d-2d^2/r & 1-2d/r\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Nach vier Reflektionen mit d=r ist die Systemmatrix:

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{M}_1\mathcal{T}_{12}\mathcal{M}_2\mathcal{T}_{21}\mathcal{A} = \mathcal{A}^2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ det|\mathcal{A}_2| &= 1\end{aligned}$$

6 Aufgabe 6.28

a. Sphärische Abberation: die Bilder bleiben symmetrisch aber mit nicht unerheblicher Intensitt der Aussenringe;

b. Koma: asymmetrische Form der Bilder mit einem Schweif am Ende;

c. Astigmatismus: Die Anwesenheit zweier Brennweiten generieren zwei senkrechte Linien, welche noch sichtbar sind.