

I. Theorieteil

T1

- **Newtons 1. Gesetz:** In einem Inertialsystem und in Abwesenheit externer Kräfte bleibt ein ruhendes Objekt in Ruhe und ein sich bewegendes Objekt bewegt sich mit unveränderter Geschwindigkeit weiter. Wenn keine Kraft auf ein Objekt wirkt, ist dessen Beschleunigung also null. Aus dem ersten Gesetz folgt **Newtons zweites Gesetz:** $\vec{F} = m\vec{a}$. Diese besagt, dass die Beschleunigung eines Objekts proportional zur auf das Objekt wirkenden Nettokraft und antiproportional zu seiner Masse ist. **Newtons 3. Gesetz:** Wenn zwei Objekte interagieren ist die Kraft F_{12} , die das Objekt 1 auf das Objekt 2 ist genau so groß wie die Kraft F_{21} , die das Objekt 2 auf das Objekt 1 ausübt. Allerdings in entgegengesetzte Richtung: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.
- **Newtons zweite Gesetz für Rotation:** $\tau = I\alpha$. Das bedeutet Drehmoment um eine Symmetrieachse, welche durch die den Schwerpunkt eines starren Objekts verläuft ist gleich dem Trägheitsmoment mal der Winkelbeschleunigung (beide in Bezug zur Rotationsachse). Oder in anderen Worten: Trägheitsmoment I ist eine Maßeinheit für den Widerstand eines Objekts seinen Drehimpuls zu verändern.
- **Relation linear momentum \vec{p} - impulse \vec{I} :**

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m\vec{v} \\ \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \\ \vec{I} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta\vec{p}\end{aligned}$$

Die Veränderung im Impuls eines Teilchens ist gleich der Kraft, die in dem Moment auf das Teilchen wirkt. Wenn man über ein Zeitintervall integriert ist die endliche Änderung des Impuls gleich der Einwirkung der Nettokraft, die auf das Teilchen wirkt.

Beziehung Drehmoment $\vec{\tau}$ - Drehimpuls \vec{L} :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Wirkt eine Kraft in Beziehung zu einer Drehachse erzeugt ein Drehmoment, welches gleich der Änderungsrate des Drehimpulses ist. In beiden Fällen stecken die Beziehungen im zweiten Newtonschen Gesetz für Translation oder Rotation, einmal nach der Zeit abgeleitet.

T2

Wie in Abbildung 1 zu sehen, wirken drei Kräfte auf das Objekt auf der Steigung: die nach unten wirkende Gravitationskraft oder Gewicht \vec{P} , die Gleitreibung \vec{F}_k entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung und die nach oben wirkende Normalkraft \vec{N} von der Ebene auf das Objekt. Man legt die x-y Ebene auf das Objekt und erhält für die Kräfte:

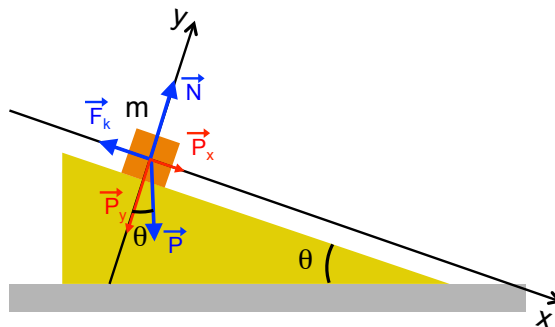


Abbildung 1: Exercise T2

- $P_x = mg \sin \theta$ verrichtet positive Arbeit entlang der x-Achse;
- $P_y = -mg \cos \theta$
- $N = -P_y$ entlang der y-Achse kompensiert die Normalkraft der schiefen Ebene die y-Komponente des Gewichts
- $F_k = -\mu_k N$ verrichtet negative Arbeit. in diesem Fall kompensiert sie den P_x Anteil, da sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt ($a = 0 \text{ m/s}^2$).

T3

Die Bewegungsgleichung (1), die kinetische Energie K und die potentielle Energie U der Feder als Funktion der Zeit sind:

$$\begin{aligned} ma &= -kx + mg \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{m}x + g \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ K(t) &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t) + mgh(t) \quad (3)$$

Die Bewegungsgleichung (4), die kinetische Energie K und die potentielle Energie U des Pendels mit kleinen Auslenkungen ($\sin \theta \simeq \theta$) als Funktion der Zeit sind:

$$\begin{aligned} ma &= -mg \sin \theta \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{g}{l}\theta \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A \cos(\omega t + \phi) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \\ K(t) &= \frac{1}{2}mv_{\text{tang}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{angular}}^2 l^2 = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}ml^2\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}mlgA^2 \sin^2(\omega t) \\ U(t) &= mgh(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Bei beiden Fällen handelt es sich um eine harmonische Oszillation, dessen Bewegung bei $t = 0$ bei der maximalen Amplitude A anfängt, sodass die Phase $\phi = 0$ ist.

Gl.(1) beschreibt die Dehnung des Feder als Funktion der Zeit $x(t)$. Die Winkelfrequenz der Oszillation hängt von der Federkonstante k und der Masse m über $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ab. Somit ist die Periodendauer $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Gl.(4) beschreibt die Winkelauslenkung des Pendels als Funktion der Zeit. Die Winkelfrequenz hängt von der Gravitationsbeschleunigung g und von der Länge des Pendels l über $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Die Periodendauer ist somit $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Die Periodendauer T für das Pendel würde sich also auf dem Mond ändern aber die des Federpendels nicht.

Die potentielle Energie des Federpendels (3) hängt von der elastischen potentiellen Energie und von der potentiellen Energie von der Gravitation ab mgh : Die Vorzeichen hängen von der Lage des Nullniveaus ab. In beiden Fällen ist die kinetische Energie bei der maximalen Auslenkung null. In dem Fall des Pendels kann man die kinetische Energie aus Gleichung (5) oder durch einfache Anwendung von Energieerhaltung berechnen.

T4

In einer perfekten elastischen Kollision werden sowohl Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ und gesamte kinetische Energie $K = \frac{1}{2}mv^2$ des Systems erhalten.

$$\begin{aligned} m_1v_{1i} + m_2v_{2i} &= m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 &= \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \end{aligned}$$

Die Anfangsgeschwindigkeiten sind $v_{1i} > 0$ und $v_{2i} = 0$ entlang der x-Achse.

- (a) $m_1 > m_2$: $v_{1f} \approx v_{1i}$ und $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Hier stößt das schwere Objekt 1 mit dem leichten Objekt 2, welches sich vor dem Stoß in Ruhe befindet. Objekt 1 bewegt sich nach der Kollision unverändert weiter und Objekt 2 bewegt sich mit etwa doppelter Geschwindigkeit von Objekt 1.

- (b) $m_1 < m_2$: $v_{1f} \approx -v_{1i}$ und $v_{2f} \approx 0$. Hier stößt das leichte Objekt 1 mit dem schweren Objekt 2 zusammen, welches sich auch zunächst in Ruhe befindet. Die Geschwindigkeit des Objekt 1 wird umgekehrt (gleicher Betrag aber entgegengesetzte Richtung) während das schwere Objekt sich näherungsweise gar nicht bewegt.
- (c) $m_1 = m_2$: $v_{1f} = v_{2i}$ Objekt 1 stoppt und $v_{2f} = v_{1i}$; der Impuls wird also von Objekt 1 auf Objekt 2 übertragen.

Der Stoß zwischen zwei Billiardkugeln ist nur näherungsweise elastisch, da eine gewisse Verformung und damit ein Verlust von kinetischer Energie vorliegt. Da man den Stoß zweier Kugeln hört wird offensichtlich ein Teil der Energie in ein Geräusch umgewandelt. Eine perfekte elastische Kollision muss vollständig geräuschlos sein.

T5

Wir wenden das Prinzip der Energieerhaltung an und vernachlässigen die Reibungskraft. Jede Kugel rollt eine Steigung der Höhe h hinunter und startet aus der Ruhe. Legt man das Nullniveau auf das Ende der Steigung erhält man:

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + 0$$

Benutzt man $v_{\text{cm}} = \omega R$, und löst nach v_{cm} auf erhält man:

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2MghR^2}{I_{\text{cm}} + MR^2}}$$

Nun setzt man das Trägheitsmoment für beide Kugeln ein: Man sieht, dass das die Vollkugel das Ende zuerst erreicht, da sie etwas schneller ist.

$$v_{\text{solid sphere}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{1.4gh}$$

$$v_{\text{hollow sphere}} = \sqrt{\frac{6}{5}gh} = \sqrt{1.2gh}$$

T6

Die allgemeinste Form eines transversalen Pulses entlang der positiven Richtung der x-Achse (nach rechts) ist $y(x, t) = f(x - vt)$. Die Wellenfunktion y ist also eine Funktion von Zeit und Ort. In dem Fall einer sich bewegenden Sinuswelle erhalten wir:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

dabei ist die Amplitude A die maximale Auslenkung des Mediums aus der Ruhelage. Die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ definiert die Wellenlänge λ und die Winkelfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ definiert die Frequenz f (oder die Periodendauer T) der Oszillation.

Die Superposition von zwei Sinuswellen ist maximal konstruktiv, wenn sie in Phase sind, sie also eine Phasenverschiebung von 0 oder einem geraden vielfachen von π : 0, 2π , 4π , ... rad

haben. Wenn die Phasenverschiebung gleich einem ungeraden vielfachen von π ist ($\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ rad), trifft immer ein Berg einer Welle auf ein Tal der anderen Welle, sodass perfekte destruktive Interferenz vorliegt.

Die Superposition zweier Wellen mit gleicher Amplitude, Frequenz und Wellenlänge aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung ergibt eine Stehende Welle, deren Wellenfunktion folgende Form annimmt:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Beachten Sie, dass die Amplitude $2A \sin(kx)$ nur eine Funktion des Orts ist. Die einhüllende der Welle zeigt also keine Bewegung.

Wenn Randbedingung vorhanden sind, überleben nur manche Wellen die Superposition mit, den an den Enden reflektierten Wellen. Stehende Wellen müssen Knoten bei 0 und L haben:

$$n \frac{\lambda}{2} = L$$

dabei ist n eine natürliche Zahl. Von den vorherigen Gleichungen können nur die Wellenlängen überleben, die vielfache von der halben Länge L sind. Jede dieser stehenden Wellen heißt normal Mode und wird durch die Nummer n identifiziert: Die erste normal Mode ($n = 1$), auch fundamentale, hat $\lambda = 2L$.

II. Rechenteil

R1

Es macht Sinn den Ursprung auf den Startpunkt des Falls zu legen und die x -Koordinate in Bewegungsrichtung und die y -Koordinate nach oben. Die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit sind v_{xi} , was gleich der Geschwindigkeit des Balls auf dem Tisch ist, und $v_{yi} = 0$. In der Wurfparabel bewegt sich ein Objekt mit konstanter Geschwindigkeit entlang der x -Achse und mit konstanter Beschleunigung g entlang der y -Achse.

- (a) Betrachte zunächst letztere Komponente um die Zeit t zu bestimmen, die der Ball in der Luft ist.

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}gt^2 \\ -1.10 \text{ m} &= -\frac{1}{2} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \\ t &= 0.47 \text{ s} \end{aligned}$$

- (b) Die Geschwindigkeit auf dem Tisch v_x ist gleich der konstanten Geschwindigkeitskomponente in der Parabel:

$$v_x = \frac{x_f - x_i}{t} = \frac{1.40 \text{ m}}{0.47 \text{ s}} = 2.98 \text{ m/s}$$

- (c) Die Endgeschwindigkeit ist gleich der Vektorsumme aus den beiden Endgeschwindigkeitskomponenten $v_{xf} = v_x$ und v_{yf} :

$$v_{yf} = v_{yi} + gt = 0 - 9.8 \cdot 0.47 \text{ m/s} = -4.61 \text{ m/s}$$

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = 5.49 \text{ m/s}$$

R2

Horizontaler Wind bringt den Ball an dem Faden aus der vertikalen Ruhelage. Man legt das Bezugssystem wie in Abbildung 2 auf den Ball, wenn dieser um den Winkel θ aus der Ruhelage ausgelenkt wurde.

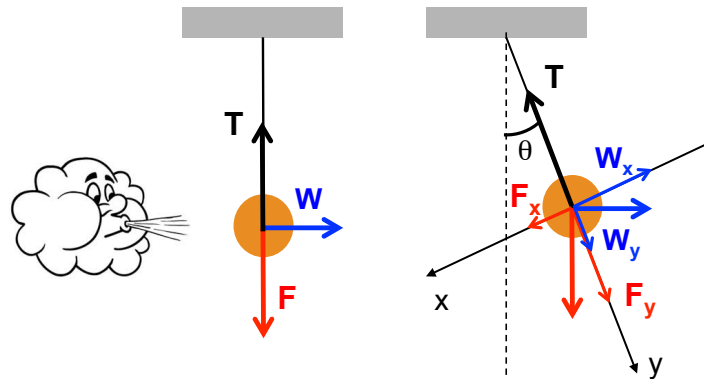


Abbildung 2: Exercise R2

- (a) Die Tangentialkomponenten der Kräfte heben sich bei dem maximalen Winkel θ gerade auf. $\vec{F} = m\vec{g}$ ist das Gewicht des Balls und $\vec{W} = 0.1 \text{ N}$ die Windkraft.

$$\begin{aligned} F_x &= W_x \\ F \sin \theta &= W \cos \theta \\ \tan \theta &= \frac{0.1 \text{ N}}{0.020 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2} \\ \theta &= 27^\circ \end{aligned}$$

- (b) Die Zugkraft im Seil hebt genau die y-Komponenten von \vec{F} und \vec{W} auf:

$$T = F \cos \theta + W \sin \theta = (0.196 \text{ N}) \cos 27^\circ + (0.1 \text{ N}) \sin 27^\circ = 0.22 \text{ N}$$

- (c) Sobald das Seil durchgeschnitten ist wirken die zwei orthogonalen Kräfte \vec{F} und \vec{W} auf den Ball, die jetzt nicht mehr durch die Zugkraft T kompensiert werden. Man wendet Newtons 2. Gesetz an um die Beschleunigung des Balls zu berechnen:

$$\begin{aligned} F_{\text{TOT}} &= 0.22 \text{ N} \\ a &= \frac{F}{m} = \frac{0.22 \text{ N}}{0.020 \text{ kg}} = 11 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

R3

Leistung ist ein Maßeinheit für die Rate von Energietransfer. Man kann die durchschnittliche und die momentane Leistung berechnen. Nehmen Sie an das Objekt, welches zunächst in Ruhe ist anfängt sich in Richtung der wirkenden Kraft zu bewegen. Arbeit L ist einfach das Produkt der konstanten Kraft \vec{F} und der Verschiebung \vec{s} als $L = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \theta$, mit $\theta = 0$.

- (a) Da eine konstante Kraft wirkt folgt aus Newtons 2. Gesetz, dass sich das Objekt mit einer konstanten Beschleunigung bewegt. Man legt den Ursprung des Koordinatensystems auf das Ruhende Objekt und die Verschiebung $s = x_f$ (nach 2 s) sowie die durchschnittliche Leistung werden folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \\ x(2\text{ s}) &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 = \frac{3\text{ N}}{2 \cdot 5\text{ kg}} \cdot 4\text{ s}^2 = 1.2\text{ m} \\ P_{\text{ave}} &= \frac{Fs}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 1.2\text{ J}}{2\text{ s}} = 1.8\text{ W} \end{aligned}$$

- (b) Um die momentane Leistung bei $t = 2\text{ s}$ zu berechnen, benötigt man die Geschwindigkeit die das Objekt bei $v(2\text{ s})$ unter der konstanten Beschleunigung a gewonnen hat:

$$\begin{aligned} v(2\text{ s}) &= v_i + at = 0 + \frac{3\text{ N}}{5\text{ kg}} 2\text{ s} = 1.2\text{ m/s} \\ P(2\text{ s}) &= F \frac{ds}{dt} = Fv(2\text{ s}) = 3\text{ N} \cdot 1.2\text{ m/s} = 3.6\text{ W} \end{aligned}$$

R4

Die Gleichung für die harmonische Oszillation ist:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (7)$$

Die Winkelfrequenz ω erhält man aus der Definition: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{ rad/s}$, mit der Federkonstante k und der Masse des Objekts m . Die Phasenkonstante ϕ und die Amplitude A der Oszillation zu bestimmen ist etwas komplizierter. in Abbildung 3 ist das System zur Zeit $t = 0\text{ s}$ zu sehen. Das Objekt hat eine Auslenkung von $x(0) = 0.2\text{ m}$ und eine negative Geschwindigkeit $v(0) = -2\text{ m/s}$.

- (a) Die Amplitude und Phasenkonstante können beide aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\begin{cases} 0.2\text{ m} = A \cos(10\text{ rad/s} \cdot t + \phi) \\ -2\text{ m/s} = -(10\text{ rad/s}) A \sin(10\text{ rad/s} \cdot t + \phi) \end{cases}$$

Lösungen des Systems sind $\phi = 0.785\text{ rad}$ (45 Grad) und $A = 0.28\text{ m}$.

- (b) Man leitet Gl.7 nach der Zeit ab und erhält $v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$. Durch einsetzen von A , ω und ϕ lässt sich die Geschwindigkeit v bei $t = 1\text{ s}$ berechnen.

$$v(1\text{ s}) = -(10\text{ rad/s} \cdot 0.28\text{ m}) \sin(10\text{ rad/s} \cdot 1\text{ s} + 0.785\text{ rad}) = 2.7\text{ m/s}$$

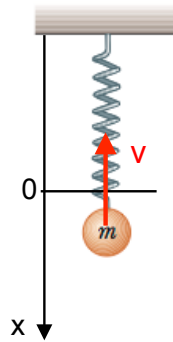


Abbildung 3: Exercise R4

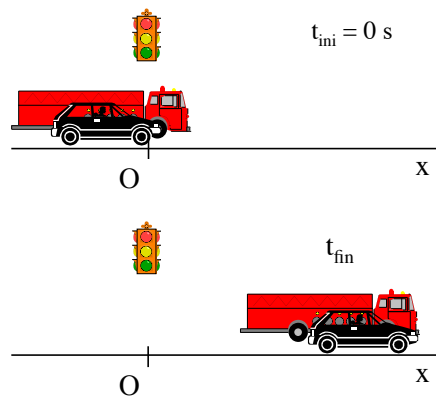


Abbildung 4: Exercise R5

R5

Das Auto sei Objekt 1 und der LKW Objekt 2, so dass $m_1 = 1 \text{ t}$, $a_1 = 3 \text{ m/s}^2$, $m_2 = 2 \text{ t}$ und $v_2 = 12 \text{ m/s}$. Des weiteren sei die Geschwindigkeit v_2 des LKWs konstant. Zuerst muss bestimmt werden, wann das Auto mit konstanter Beschleuniger a_1 den LKW überholen wird. Zu diesem Zeitpunkt (in Abbildung 4 t_f) ist der Abstand beider Objekte zur Ampel gleich, so dass $x_{1f} = x_{2f}$:

$$v_2 t = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$t(v_2 - \frac{1}{2} a_1 t) = 0$$

Eine Lösung oberer Gleichung ist bei $t_i = 0 \text{ s}$, da dort beide Objekte an der gleichen Stelle $x_{1i} = x_{2i} = 0 \text{ m}$ sind. Interessanter ist die zweite Lösung $t_f = 2v_2/a_1 = 8 \text{ s}$, dort sind beide Objekte bei $x_f = v_2 t_f = 96 \text{ m}$. Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Impuls in Bezug zum Schwerpunkt des Systems Auto/ LKW werden folgendermaßen berechnet:

(a)

$$x_{\text{cmf}} = \frac{x_f(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = 96 \text{ m}$$

(b)

$$v_{\text{cmf}} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2} = 16 \text{ m/s}$$

wobei v_{2f} konstant ist und gleich v_2 und $v_{1f} = v_{1i} + a_1 t_f = 0 + 3 \text{ m/s}^2 \cdot 8 \text{ s} = 24 \text{ m/s}$.

(c)

$$a_{\text{cmf}} = \frac{m_1 a_{1f} + m_2 a_{2f}}{m_1 + m_2} = 1 \text{ m/s}^2$$

wobei a_{1f} konstant ist und $a_{2f} = 0$.

(d)

$$I = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{(m_1 + m_2)(v_{\text{cmf}} - v_{\text{cmi}})}{8 \text{ s}} = 3 \cdot 10^3 \text{ kgm/s}^2$$

wobei v_{cmf} bei Aufgabe (b) bestimmt wurde und v_{cmi} ist:

$$v_{\text{cmi}} = \frac{m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = 8 \text{ m/s}$$

R6

(a) Durch einfaches Ableiten der Funktion $\theta(t) = 0.3t + 0.4t^2$, erhält man die Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\omega(2 \text{ s}) = 0.3 + 0.8t = 1.9 \text{ rad/s}$$

(b) Mit dem Radius R der Zentrifuge ist die lineare Geschwindigkeit

$$v(2 \text{ s}) = \omega R = 1.9 \text{ rad/s} \cdot 10 \text{ m} = 19 \text{ m/s}$$

(c) Zentripetal Beschleunigung: $a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 3.61 \text{ s}^{-2} \cdot 10 \text{ m} = 36.1 \text{ m/s}^2$.

(d) Tangential Beschleunigung: $a_t = \alpha R$, wobei α die Winkelbeschleunigung ist, welche aus zweifacher Ableitung der $\theta(t)$ Funktion bestimmt werden kann:

$$a_t = 0.8R = 0.8 \text{ s}^{-2} \cdot 10 \text{ m} = 8 \text{ m/s}^2$$

Die tangentielle Beschleunigung ist also über die Zeit konstant.

(e) In dem Zeitintervall $\Delta t = 2 \text{ s}$, ist der Drehwinkel $\theta(2 \text{ s}) = 0.6 + 1.6 = 2.2 \text{ rad}$

(f) und die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist:

$$\omega_{\text{ave}} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{2.2 \text{ rad}}{2 \text{ s}} = 1.1 \text{ rad/s}.$$

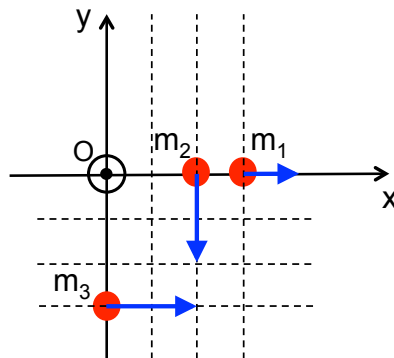


Abbildung 5: Exercise R7

R7

Betrachten Sie Abbildung 5 um die Lage der Körper in der x-y Ebene zu sehen. Die z-Achse ist positiv entlang der orthogonalen aus dem Blatt herauskommenden Achse .

Der Gesamtdrehimpuls des Teilchensystems ergibt sich als Summe der Drehimpulse der einzelnen Körper. Objekt 1 bewegt sich entlang der x-Achse, parallel zu seinem Ortsvektor \vec{r}_1 in Bezug zum Ursprung: Somit ist sein Drehimpuls null. Nach dem Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{p}$ und der rechten Hand Regel, sind die Drehmomente von Objekt 2 und 3 parallel zur z-Achse aber in entgegengesetzte Richtungen:

$$L_{\text{tot}} = L_2 + L_3 = m(-r_2 v_2 + r_3 v_3) = 2 \text{ kg}(-8 + 12) \text{ m/s}^2 = 8 \text{ kgm/s}^2$$