# Übungen zur Physik für Chemiker I WS19/20

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 1 Lösung

17. Oktober 2019

**Aufgabe 1.** *Vektoren I*

Nehmen Sie an, Objekt **A** befindet sich bei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ in Bezug zum Ursprung **0** und ein weiteres Objekt **B** befindet sich an einem Punkt, der durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ in Bezug zum gleichen Ursprung **0** gegeben ist.

(a) Wie weit ist Objekt **A** vom Ursprung entfernt ?

(b) Wie weit ist Objekt **B** vom Ursprung entfernt ?

(c) Wie weit ist **A** von **B** entfernt ?

(d) Wie groß ist der Winkel zwischen Position **A** und **B** ?

**Lösung 1.**

(a) Die Entfernung von Objekt **A** zum Ursprung ist die Länge (auch Betrag) des Ortsvektors, der den Punkt repräsentiert. man kann $\vec{a}$ in rechteckigen Koordinaten auch schreiben als $(5, 7, 8)$, wobei 5, 7 und 8 die skalaren Komponenten des Vektors in der x, y und z-Richtung sind. Der Betrag dieses Vektors ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{25 + 49 + 64} \\ &= \sqrt{138} \end{aligned}$$

(b) Wie bei Objekt **A** ist die Entfernung von Objekt **B** zum Ursprung der Betrag des Ortsvektors, der die Position **B** repräsentiert. Der Betrag des Vektors ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{126} \end{aligned}$$

(c) Der Abstand zwischen beiden Punkten ist der Betrag der Differenz der beiden Ortsvektoren. Sei dieser Vektor $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Mit Vektoralgebra findet man:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{b} - \vec{a} \\ &= (-8, -1, 1) \end{aligned}$$

Nun muss man wieder die Länge des Vektors bestimmen.

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{66} \end{aligned}$$

(d) Der Winkel $\Theta$ zwischen den beiden Ortsvektoren kann mithilfe der Definition des Skalarproduktes berechnet werden:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \Theta$$

Nach kurzen Termumformungen folgt:

$$\begin{aligned} \Theta &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} \\ &= 41{,}34° \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** *Vektoren II*

(a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Flächendiagonalen eines Würfels mit Seitenlänge 1.

(b) Zeigen Sie, dass die zwei Seiten des Würfels orthogonal aufeinander stehen.

(c) Berechnen Sie das Kreuzprodukt zwischen einer der Flächendiagonalen und einer Seitenkante, die vom gleichen Eckpunkt startet.

*Hinweis:* Beide Flächendiagonalen zeigen vom Ursprung **0** zum Eckpunkt hin, z.B. zum Punkt $(1, 1, 0)$.

**Lösung 2.**

Man betrachte zum Beispiel die Flächendiagonalen mit Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Der Winkel kann wieder wie in Aufgabe 1 berechnet werden:

$$\Theta = \arccos 0.5 = 60°$$

(b) Man betrachte zum Beispiel die Seiten, die durch die Ortsvektoren $\vec{S}_1 = (1, 0, 0)$ und $\vec{S}_2 = (0, 0, 1)$ dargestellt werden. Der Winkel kann wieder mit bekannter Formel berechnet werden.

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 &= S_1 S_2 \cos \Theta \\ \cos \Theta &= 0 \Rightarrow \Theta = 90° \end{aligned}$$

Die beiden Seiten stehen also senkrecht aufeinander.

(c) Das Kreuzprodukt zweier Vektoren, z.B. $\vec{U} = \big(U_x, U_y, U_z\big)$ und $\vec{V} = \big(V_x, V_y, V_z\big)$, ist im rechteckigen Koordinatensystem gegeben durch:

$$\vec{U} \times \vec{V} = \big(U_y V_z - U_z V_y, U_z V_x - U_x V_z, U_x V_y - U_y V_x\big)$$

Wendet man diese Definition an, findet man, dass das Kreuzprodukt zwischen der Seite des Würfels $(1,0,0)$ und der Flächendiagonalen $(1,1,0)$ gleich $(0,0,1)$ ist. An diesem Ergebnis sieht man, dass das Kreuzprodukt zweier Vektoren senkrecht auf der von den zwei Vektoren aufgespannten Fläche steht.

**Aufgabe 3.** *Differentialrechnung*
Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen im kartesischen Koordinatensy stem.

(a) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(b) $f(x) = e^{-x}(x^2 + 6x + 1)$

(c) $g(x) = \frac{ln(2x)}{x}$

**Lösung 3.**
(a) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$

(b) Hier wird die Produktregel verwendet.

$f'(x) = (2x + 6) \cdot e^{-x} - (x^2 + 6x + 1) \cdot e^{-x} = e^{-x}(2x + 6 - x^2 - 6x - 1) = e^{-x}(-x^2 - 4x + 5)$

(c) In diesem Beispiel muss man die Quotientenregel anwenden.

$$g'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - ln(2x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - ln(2x)}{x^2}$$

**Aufgabe 4.** *Integrale*
(a) $\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x + 4)dx$

**Lösung 4.**
(a) Eine Möglichkeit, Integrale zu lösen, ist die Methode der partiellen Integration. Mathematisch geschrieben heißt das:

$$\int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

Bei diesem Integral nehmen wir $u = x$ und $dv = e^{-x}dx$. Demzufolge können wir das Integral woe folgt schreiben:

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx$$

Dieses Integral lässt sich dann einfach lösen und man erhält: $\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$

(b) Um dieses Integral zu lösen, kann man einfach beide Integrale getrennt bestimmen und diese dann addieren.

$$\int_0^{\pi/2} \sin(5x)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{5}$$
$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2} = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx = \frac{1}{5}$$

(c) Da das Integral der Summe von Funktionen gleich der Summe der Integrale jeder einzelnen Funktion ist, kann man schreiben:

$$\int_0^{\pi/2}(x^3+x+4)dx = \int_0^{\pi/2} x^3dx + \int_0^{\pi/2} xdx + \int_0^{\pi/2} 4dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi/2} + 4x\Big|_0^{\pi/2} \approxeq 9.04$$

**Aufgabe 5.** *Polarkoordinaten*

(a) Schreiben Sie die rechteckigen Koordinaten $(4,5)$ in Polarkoordinaten um.

(b) Schreiben Sie die Polarkoordinaten $(12,45°)$ in rechteckige Koordinaten um.

**Lösung 5.**

Die kartesischen Koordinaten $(x,y)$ können auch in Polarkoordinaten $(r,\phi)$ dargestellt werden. Dabei gilt:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\phi = \arctan(y/x)$$

Ebenso gut können Polarkoordinaten wieder in kartesische Koordinaten überführt werden. Hierbei gilt:

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi)$$

(a) Mit diesen Definitionen lassen sich die kartesischen Koordinaten $(4,5)$ in Polarkoordinaten $(r,\phi)$ transformieren.

$$r = \sqrt{4^2+5^2} \approxeq 6.4$$
$$\phi = \arctan(5/4) \approxeq 51{,}34°$$

Also transformieren sich die kartesischen Koordinaten $(4,5)$ in die Polarkoordinaten $(6.4, 51{,}34°)$.

(b) Ähnlich wie bei $(a)$ verwendet man hier einfach die Definition von oben um die Polarkoordinaten $(12,45°)$ in kartesische Koordinaten $(x,y)$ zu transformieren.

$$x = 12\cos(45°) = 6\sqrt{2}$$
$$y = 12\sin(45°) = 6\sqrt{2}$$

So werden die Polarkoordinaten $(12,45°)$ die kartesische Koordinaten $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$.