Übungen zur Physik für Chemiker I WS20/21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 10 Lösung

Ausgabe: Mi, 27.01.2021

Aufgabe 1. *Amplitude Phase und Frequenz*

Eine Sinuswelle der Wellenlänge 4 m und der Amplitude 0,2 m bewegt sich durch einen Faden mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s. Anfangs ist das linke Ende des Fadens im Ursprung.

(a) Bestimmen Sie die Frequenz, Winkelfrequenz, die Wellenzahl und die Wellenfunktion dieser Welle

(b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion, wenn das linke Ende eine vertikale Position von 0,2 m bei $t = 0$ hat.

(c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes auf dem Seil ?

Lösung 1.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle hängt von ihrer Wellenlänge λ und der Periodendauer T ab: $v = \frac{\lambda}{T}$. Das Inverse der Periodendauer ist die Frequenz, also ist $v = \lambda f$. Aus der letzten Gleichung erhalten wir:

(a)

$$f = \frac{v}{\lambda} = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$$
$$\omega = 2\pi f = \pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$
$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}\mathrm{m}^{-1}$$

Der Wellenvektor berechnet sich durch $k = 2\pi\tilde{\nu} = \frac{\pi}{2}\mathrm{rad/m}$.
Somit gilt für die Wellengleichung:

$$y(x,t) = 0.2\sin(\frac{\pi}{2}x - \pi t)$$

Die Wellengleichung $y(x,t)$ wird in SI-Einheiten angegeben. Hier war das linke Ende des Fadens am Ursprung.

(b) Nur die Position des Ursprungs ändert sich: Bei $t = 0$ hat der Faden eine vertikale Verschiebung von 0,2 m, das ist gleich der Amplitude der Welle. Also erhält die Wellengleichung eine Phase von $\frac{\pi}{2}$ und wird zu:

$$y(x,t) = 0.2\sin(\frac{\pi}{2}x - \pi t + \frac{\pi}{2}) = 0.2\cos(\frac{\pi}{2}x - \pi t)$$

(c) Jeder Punkt auf dem Faden bewegt sich mit einer einfachen harmonischen Bewegung orthogonal zur Ausbreitungsrichtung. Die maximale transversale Geschwindigkeit taucht immer bei $y = 0$ auf und ist:

$$v_{max} = \omega A = 0{,}628\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Aufgabe 2. *Energietransfer*
Ein gespanntes Seil habe unter einer Zugkraft von 160 N eine Längendichte von $\mu = 0{,}1\,\mathrm{kg/m}$. Das Seil vibriert und generiert eine sich bewegende Sinuswelle mit einer Frequenz von 120 Hz und einer Amplitude von 12 cm. Wie viel Energie pro Zeiteinheit wird durch die Welle transportiert ?
Hinweis: Die Geschwindigkeit der Sinuswelle berechnet sich durch:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

wobei τ die Spannkraft und μ die Längendichte.

Lösung 2.
Den Energietransfer der Welle auszurechnen heißt die Leistung der Welle auszurechnen, welche definiert ist als:

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

Dabei ist v die Wellengeschwindigkeit auf dem gespannten Seil. Diese errechnet sich aus der Spannkraft τ und der Massendichte μ wie folgt: $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$. Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 753{,}98\,\mathrm{s}^{-1}$. Somit ist die pro Zeit transportierte Energie:

$$P = 16\,372{,}39\,\mathrm{W}$$

Aufgabe 3. *Superposition von Wellen*
Eine stehende Welle sei das Ergebnis der Superposition der folgenden zwei transversalen Wellen:

$$y_1 = 0.05\cos(\pi x - 4\pi t)$$
$$y_2 = 0.05\cos(\pi x + 4\pi t)$$

wobei x, y_1 und y_2 in Metern und t in Sekunden angegeben wird.

(a) Was ist der kleinste positive Wert für x, der einem Knoten entspricht ?

(b) Zu welchen Zeitpunkten im Intervall $0 \leq t \leq 0{,}5\,\mathrm{s}$ wird das Seilelement bei $x = 0$ die Geschwindigkeit null haben ?

Lösung 3.

(a) Wir nutzen bei der Superposition folgende Beziehung:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= 0.05\cos(\pi x - 4\pi t) + 0.05\cos(\pi x + 4\pi t) \\ &= 0.05\left[\cos(\pi x - 4\pi t) + \cos(\pi x + 4\pi t)\right] \\ &= 0.05\left[2\cdot\cos\left(\frac{\pi x - 4\pi t + \pi x + 4\pi t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x - 4\pi t - \pi x - 4\pi t}{2}\right)\right] \\ &= 0.05\left[2\cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{-8\pi t}{2}\right)\right] \\ &= 0.1\left[\cos(\pi x)\cdot\cos(-4\pi t)\right] \\ &= 0.1\left[\cos(\pi x)\cdot\cos(4\pi t)\right] \end{aligned}$$

Der kleinste Wert von x, der zu $\cos(\pi x) = 0$ führt, ist also:

$$\cos(\pi x) = 0 \quad \Rightarrow x = 0{,}5\,\mathrm{m}$$

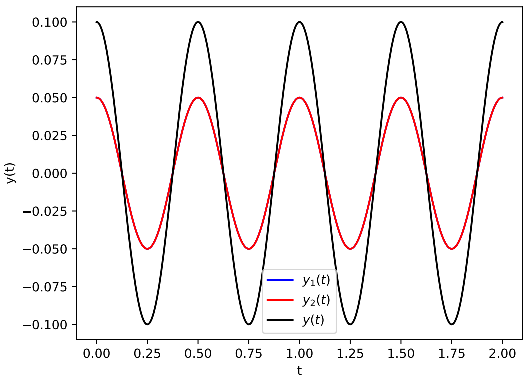

Abbildung 1: Plot für $x = 0$. Man sieht, dass y_1 und y_2 identisch sind und sich komplett überlagern.

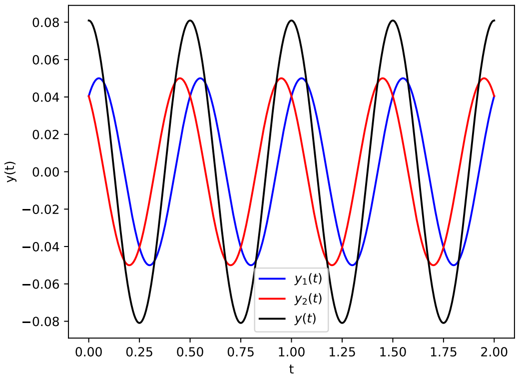

Abbildung 2: Plot für $x = 0.2$. Nun sieht man, wie die verschiedenen Wellen addiert die resultierende Welle ergeben.

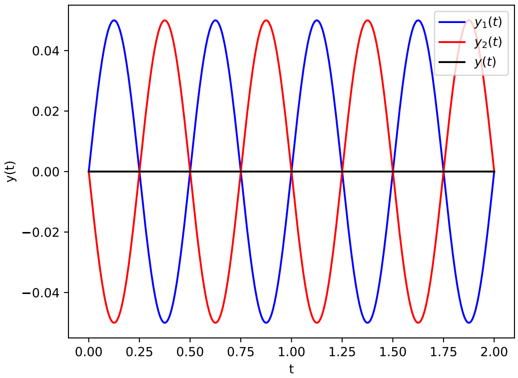

Abbildung 3: Plot für $x = 0.5$. Wie berechnet, ist die resultierende Welle konstant bei Null, was einem Knoten entspricht.

(b) Wir leiten nach der Zeit ab. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} v = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= 0.1\cos(\pi x)\left[-\sin(4\pi t)\cdot 4\pi\right] \\ &= -0.4\pi\cos(\pi x)\cdot\sin(4\pi t) \\ &\overset{x=0}{=} -0.4\pi\sin(4\pi t) \end{aligned}$$

Der Sinus wird Null, wenn das Argument ein ganzes Vielfaches von π ist. Also muss $t = 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}$ gelten.

Aufgabe 4. *Zwei Lautsprecher*

Die beiden Lautsprecher in Abb. 4 haben einen Abstand von 2 m und seien in Phase. Ein Zuhörer befinde sich in einem Abstand von 3,75 m direkt vor einem der Lautsprecher. Wir nehmen an, die Amplituden der Schallwellen von den Lautsprechern seien bei dem Zuhörer nahezu gleich.

(a) Für welche Frequenzen im hörbaren Bereich, also 20 Hz − 20 kHz nimmt der Zuhörer ein minimales Signal wahr ?

(b) Für welche Frequenzen ist das Signal maximal ?

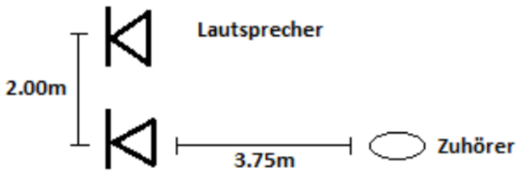

Abbildung 4: Skizze der Lautsprecher

Hinweis: Die Geschwindigkeit einer Schallwelle beträgt:

$$v = 343\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Lösung 4.
Bezeichnen wir den Abstand vom näheren Lautsprecher zum Zuhörer mit L_1. Der Abstand vom anderen Lautsprecher zum Zuhörer ist $L_2 = \sqrt{L_1^2 + d^2}$, wobei d den Abstand zwischen den Lautsprechern bezeichnet. Die Phasendifferenz beim Zuhörer ist:

$$\varphi = 2\pi(L_2 - L_1)/\lambda$$

wobei λ die Wellenlänge bezeichnet.

(a) Für ein Minimum der Intensität beim Zuhörer muss $\varphi = (2n+1)\pi$ sein, wobei n eine ganze Zahl ist. Also gilt:

$$\lambda = 2(L_2 - L_1)/(2n+1)$$

Mit der Schallgeschwindigkeit von $v = 343\,\mathrm{m/s}$ ist die Frequenz damit:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{(2n+1)v}{2(\sqrt{L_1^2 + d_2} - L_1)} = (2n+1)(343\,\mathrm{Hz})$$

Wir haben nun $20000/343 = 58.3$, also muss $2n+1$ zwischen Null und 57 liegen, damit die Frequenz im hörbaren Bereich liegt. Das heißt, dass n zwischen 1 und 28 liegt und $f = 1029, 1715, ..., 19\,550\,\mathrm{Hz}$ ist.

(b) Für ein Maximum der Intensität beim Zuhörer muss $\varphi = 2\pi n$ sein, wobei n eine ganze Zahl ist. Also gilt:

$$\lambda = \frac{1}{n}(\sqrt{L_1^2 + d^2} - L_1)$$

und

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{(\sqrt{L_1^2 + d^2} - L_1)} = n(686\,\mathrm{Hz})$$

Wegen $20000/686 = 29.2$, muss n zwischen 1 und 29 liegen, damit die Frequenz hörbar ist, und dann ist $f = 686, 1372, ..., 19\,890\,\mathrm{Hz}$.

Aufgabe 5. *Stehende Wellen*

Ein an beiden Enden befestigtes Seil habe eine Länge von 8,4 m, eine Masse von 0,12 kg und unterliege einer Spannkraft von 96 N. Dieses Seil wird zu einer Schwingung angeregt.

(a) Welche Geschwindigkeit haben die Wellen auf dem Seil ?

(b) Welche maximale Wellenlänge ist für eine stehende Welle möglich ?

(c) Bestimmen Sie die Frequenz dieser Welle.

Hinweis: Die Geschwindigkeit kann wie in Aufgabe 2 berechnet werden. Dabei gilt aber hier $\mu = \frac{M}{L}$. (M ist die Masse des Seils, L die Länge)

Lösung 5.

(a) Die Wellengeschwindigkeit ist wie oben durch $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ gegeben. Weil die Massendichte die Masse pro Einheitslänge ist, gilt $\mu = \frac{M}{L}$, wobei M die Masse und L die Länge des Seils bezeichnet. Damit erhalten wir: $v = \sqrt{\frac{\tau L}{M}} = 82\,\mathrm{m/s}$.

(b) Die größtmögliche Wellenlänge λ für eine stehende Welle ist mit der Länge des Seils über $L = \frac{\lambda}{2}$ verknüpft, also ist $\lambda = 2L = 16{,}8\,\mathrm{m}$.

(c) Die Frequenz ist $f = \frac{v}{\lambda} = 4{,}88\,\mathrm{Hz}$.