Übungen zur Physik für Chemiker I WS20/21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 4 Lösung

Ausgabe: Mi, 02.12.2020

Aufgabe 1. *Schiefe Ebene mit Reibung*
Auf einer schiefen Ebene mit einem Winkel α zum Boden, liegt ein Block der Masse m aus einem unbekanntem Material. Der Block liegt in der Höhe s (vom Boden vertikal gemessen) und hat den Haftreibungskoeffizienten μ_H und den Gleitreibungskoeffizienten μ_G

(a) Berechnen Sie den Winkel α in Abhängigkeit von μ_H, bei dem der Block anfängt zu rutschen.

(b) Die schiefe Ebene soll nun aus Stahl bestehen. Berechnen Sie den Haftreibungskoeffizienten, wenn

  (i) Der Block aus Holz besteht. Der Winkel, bei dem der Block anfängt zu rutschen ist $\alpha_{Stahl} = 26{,}57°$.

  (ii) Der Block aus Eis besteht. Der Winkel, bei dem der Block anfängt zu rutschen, ist $\alpha_{Eis} = 1{,}72°$

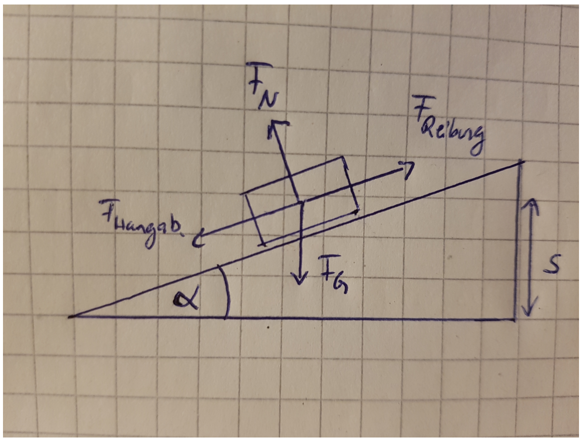
(c) Welche Kräfte wirken, wenn der Block sich bewegt ?

(d) Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Geschwindigkeit des Blocks am Ende der schiefen Ebene her. Die Geschwindigkeit ist abhängig von der Höhe s, dem Winkel α und dem Gleitreibungskoeffizienten μ_G. Berechnen Sie die Geschwindigkeit am Ende der Ebene für $\alpha = 35°$ für den Block aus Holz ($\mu_G = 0.4$) und aus Eis ($\mu_G = 0.01$) bei einer Höhe von $s = 0{,}5\,\mathrm{m}$

(e) Nachdem der Holzblock die schiefe Ebene verlassen hat, rutscht er in horizontaler Ebene weiter. Die horizontale Ebene besteht aus Stahl mit einem leichten Ölfilm. Der Gleitreibungskoeffizient ändert sich zu $\mu_G = 0.1$. Wie weit rutcht der Block noch auf der horizontalen Ebene ?

Lösung 1.

(a) Skizze:



Berechne den Winkel, bei dem der Block sich gerade noch nicht bewegt:

$$|F_{Hang}| \overset{!}{=} |F_{Haftr.}|$$
$$F_{Hang} = F_H = mg \sin\alpha$$
$$F_{Haftr.} = F_R = \mu_H \cdot F_N = \mu_H \cdot mg \cos\alpha, \qquad \text{mit} \quad F_N \quad \text{Normalkraft senkrecht zur Oberfläche.}$$

Kräftegleichungen einsetzen:

$$\Rightarrow mg \sin\alpha = \mu_H mg \cos\alpha$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \mu_H$$
$$\Rightarrow \alpha = \arctan \mu_H$$

Damit der Block anfängt zu Rutschen:

$$\alpha > \arctan \mu_H$$

(b) Obige Formel nach μ_H umstellen:

$$\mu_H = \tan\alpha$$
$$\mu_H^{Holz} = \tan 26{,}57° \approx 0.5$$
$$\mu_H^{Eis} = \tan 1{,}72° \approx 0.03$$

(c) Sobald der Block sich bewegt, wirkt statt der Haftreibungskraft die Gleitreibungskraft $F_G = \mu_G \cdot F_N$. Diese ist geringer als die Haftreibungskraft, da auch $\mu_G < \mu_H$. Die anderen Kräfte - Gewichtskraft, Normalkraft - bleiben unverändert.

(d) Wir betrachten die Bewegung entlang der schiefen Ebene. Die Geschwindigkeit am Ende der Ebene v_E ist:

$$v_E = a_{ges} \cdot t$$

Die Beschleunigung a wird durch die Hangabtriebskraft erzeugt, wobei die Gleitreibungskraft den Block bremst.

$$\begin{aligned} F_{ges} &= m \cdot a_{ges} = F_{Hanga.} - F_{Gleit.} = mg \sin\alpha - \mu_G mg \cos\alpha \\ \Rightarrow a_{ges} &= \frac{F_{ges}}{m} = g \cdot (\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha) \end{aligned}$$

Berechne nun die Zeit t, die der Block benötigt um die Strecke x auf der Ebene bis nach unten zu Rutschen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} a_{ges} t^2 \\ \text{Außerdem:} \quad x(t) &= \frac{s}{\sin\alpha} \\ \Rightarrow \frac{s}{\sin\alpha} &= \frac{1}{2} a_{ges} t^2 \\ \Leftrightarrow t &= \sqrt{2 \frac{s}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{g \cdot (\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha)}} \end{aligned}$$

Zeit t und Beschleunigung a_{ges} einsetzen:

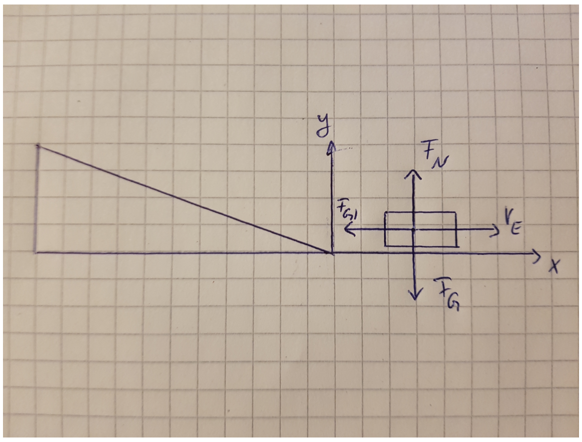
$$\begin{aligned} v_E &= t \cdot a_{ges} \\ &= \sqrt{2 \frac{s}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{g \cdot (\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha)}} \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha) \\ &= \sqrt{2sg \cdot (1 - \mu_G \tan\alpha)} \end{aligned}$$

Mit eingesetzten Werten:

$$\begin{aligned} v_E^{Holz} &\approx 2{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v_E^{Eis} &\approx 3{,}12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

(e) Skizze: Keine Beschleunigung mehr durch Hangabtriebskraft, gleichförmige Bewegung mit v_E, abgebremst durch Gleitreibung.

$$\begin{aligned} x_{Boden}(t) &= v_E \cdot t + \frac{1}{2} a_{Reibung} t^2 \\ a_{Reibung} &= -\frac{F_{Gleitr.}}{m} = -\frac{\mu_G^{neu} mg}{m} = -\mu_G^{neu} \cdot g \\ \Rightarrow x_{Boden}(t) &= v_E t - \frac{1}{2} \mu_G^{neu} g t^2 \end{aligned}$$



Wir suchen den Endpunkt der Bewegung, also $x_B(t)$ soll maximal werden.

$$\begin{aligned} x_B(t) \rightarrow &\quad \text{maximal} \\ \Rightarrow \dot{x}_B(t) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \dot{x}_B(t) = v_E - \mu_G^{neu} g t &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow t_{Stopp} &= \frac{v_E}{\mu_G^{neu} g} \end{aligned}$$

t_{Stopp} einsetzen in $x_B(t)$:

$$\begin{aligned} x_B(t_{Stopp}) &= v_E \cdot \frac{v_E}{\mu_G^{neu} g} - \frac{1}{2}\mu_G^{neu} g \left(\frac{v_E}{\mu_G^{neu} g}\right)^2 \\ &= \frac{v_E^2}{\mu_G^{neu} g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_E^2}{\mu_G^{neu} g} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{v_E^2}{\mu_G^{neu} g} \end{aligned}$$

Berechne Endpunkt für Holzblock bei neuem Gleitreibungskoeffizienten $\mu_G^{neu} = 0.1$ und $v_E^{Holz} = 2{,}66\,\mathrm{m/s}$:

$$x_{Ende}^{Holz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2{,}66\,\mathrm{m/s})^2}{0.1 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 3{,}61\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 2. *Kraft und Arbeit*

(a) Ein Teilchen erfährt durch eine konstante Kraft eine Verschiebung in der xy-Ebene. Die Verschiebung ist gegeben durch $\varDelta\vec{r} = (6m)\vec{e_x} + (2m)\vec{e_y}$ und die Kraft durch $\vec{F} = (12N)\vec{e_x} - (4N)\vec{e_y}$. Berechnen Sie die von der Kraft $\vec{F}$ geleistete Arbeit und bestimmen Sie den Winkel zwischen der Verschiebung und der Kraft.

(b) Ein Block der Masse $m = 5\,\mathrm{kg}$ wird durch eine Kraft eine Strecke von $4{,}4\,\mathrm{m}$ auf einer horizontalen, reibungsfreien Fläche geschoben. Der Betrag der Kraft ist $32\,\mathrm{N}$ und sie zeigt in einem Winkel von $50°$ unter der horizontalen. Berechnen Sie die geleistete Arbeit von dieser Kraft, der Normalkraft (ausgeübt von der Fläche) und von der Gravitationskraft. Bestimmen Sie zusätzlich die netto Arbeit die am Block verrichtet wird.

(c) Die Kraft die auf ein Teilchen wirkt ist gegeben durch $F(x) = (22\,\mathrm{kg/s^2} \cdot x - 32\,\mathrm{N})$, wobei x in Metern angegeben wird. Berechnen Sie d ie netto Arbeit, die die Kraft am Teilchen leistet, wenn es sich von $x = 0$ zu $x = 5\,\mathrm{m}$ bewegt.

Lösung 2.

(a) Ein Teilchen erfährt durch eine konstante Kraft eine Verschiebung in der xy-Ebene. Die Verschiebung ist gegeben durch $\Delta\vec{r} = (6m)\vec{e_x} + (2m)\vec{e_y}$ und die Kraft durch $\vec{F} = (12N)\vec{e_x} - (4N)\vec{e_y}$. Die von der Kraft $\vec{F}$ am Teilchen geleistete Arbeit ist definiert als:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Somit beträgt die benötigte Arbeit $W = 64\,\mathrm{J}$. Um den Winkel zwischen Kraft und Verschiebung zu finden kann man die Definition des Skalarproduktes verwenden.

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\Theta = 64\,\mathrm{J}$$

wobei Θ der Winkel zwischen Kraft und Verschiebung ist. Der Betrag von $\vec{F}$ und $\vec{r}$ sind gegeben durch:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(12N)^2 + (4N)^2} = 12{,}65\,\mathrm{N}$$

und

$$|\Delta r| = \sqrt{(6m)^2 + (2m)^2} = 6{,}32\,\mathrm{m}$$

Einsetzen der Werte und auflösen nach Θ zeigt, dass der Winkel zwischen Kraft und Verschiebung etwa $\Theta \approx 36{,}9°$ ist.

(b) Ein Block der Masse $m = 5\,\mathrm{kg}$ wird durch eine Kraft eine Strecke von $4{,}4\,\mathrm{m}$ auf einer horizontalen reibungsfreien Fläche geschoben. Der Betrag der Kraft ist $32\,\mathrm{N}$ und sie zeigt in einem Winkel von $50°$ unter der horizontalen. Die von der Kraft geleistete Arbeit ist gegeben durch

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Da die Bewegung entlang der horizontalen Fläche (also der x-Achse) ist, kann man die obere Gleichung schreiben als

$$W_F = F_x|\Delta\vec{r}|$$

wobei F_x die Komponente von $\vec{F}$ entlang der Verschiebung ist (x-Richtung). Durch einfache Vektoralgebra sieht man, dass

$$F_x = |\vec{F}| \cos\Theta = 20{,}6\,\mathrm{N}$$

Somit ist die von der Kraft verrichtete Arbeit $90{,}64\,\mathrm{J}$.
Da es keine Verschiebung in Richtung der Normalkraft gibt (da die Normalkraft senkrecht zur Oberfläche wirkt), ist die von der Normalkraft verrichtete Arbeit null ($W_N = 0$).
Die Gravitationskraft zeigt nach unten und es ist keine Verschiebung in dieser Richtung vorhanden. Somit ist die verrichtete Arbeit wieder null ($W_G = 0$).
Die netto Arbeit W_{net} ist die Summe der Arbeiten aller Kräfte, die auf den Block wirken.

$$W_{net} = W_F + W_N + W_G$$

Deshalb ist die netto Arbeit, die am Block verrichtet wird, $90{,}64\,\mathrm{J}$.

(c) Die Kraft die auf ein Teilchen wirkt ist gegeben durch $F(x) = (22\,\mathrm{kg/s^2})x - 32\,\mathrm{N}$, wobei x in Metern angegeben wird. Die netto Arbeit, die von der Kraft am Teilchen verrichtet wird, während es sich von $x_0 = 0\,\mathrm{m}$ nach $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ bewegt, ist gegeben durch

$$W = \int_0^5 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^5 (22x - 32)\mathrm{d}x = 11x^2 - 32x\Big|_0^5 = 115\,\mathrm{J}$$

Somit ist die netto Arbeit, die von dieser sich verändernden Kraft am Teilchen verrichtet wird während es sich von $x_0 = 0\,\mathrm{m}$ zu $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ bewegt, $115\,\mathrm{J}$.