Übungen zur Physik für Chemiker I WS20/21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 5 Lösung

Ausgabe: Mi, 09.12.2020

Aufgabe 1. *Arbeit und kinetische Energie*
Die Internationale Raumstation ISS umkreist die Erde in einer Höhe von etwa 400 km. Ihre Bahnhöhe nimmt durch den Luftwiderstand täglich ungefähr 100 m ab. Die Masse der ISS beträgt 455 t.

(a) Das Anheben der ISS wird in unregelmäßigen Abständen mit Hilfe eines Triebwerks realisiert. Welche Arbeit muss aufgewendet werden, um die ISS nach einem Monat(30 Tage) wieder auf die ursprüngliche Höhe von 400 km anzuheben ?

(b) Um welchen relativen Beitrag muss die Geschwindigkeit erhöht werden, damit die ISS wieder auf ihrer ursprünglichen Bahn läuft ?

Hinweis: Benutzen Sie für Aufgabenteil (a) das Newton'sche Gravitationsgesetz $F = G\frac{m \cdot M}{r^2}$ mit der Gravitationskonstanten G.

Lösung 1.
(a) Zunächst bestimmen wir den Radius, den die ISS nach 30 Tagen nur noch hat.

$$R_{30} = R - 30 \cdot 100\,\mathrm{m} = 397\,\mathrm{km}$$

Da der Luftwiderstand nicht konservativ ist, muss die Arbeit die Änderung der mechanischen Energie sein.

$$W = \Delta E_m$$

Diese Arbeit ist gleichzeitig die Arbeit, die von den Triebwerken aufgewendet werden muss, um den Radius der ISS nach den 30 Tagen zu korrigieren. Somit müssen wir die Änderung der mechanischen Energie berechnen. Es gilt:

$$E_m = E_{\mathrm{kin}} + E_p$$

Weiterhin gilt:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega R)^2$$
$$\Delta E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}m\omega^2\left(R^2 - R_{30}^2\right)$$

Hierbei beschreibt $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Winkelgeschwindigkeit und $T = 1 \quad \text{Tag}$. Außerdem ist die Änderung der potentiellen Energie:

$$\begin{aligned}
W_G &= -\Delta E_p \\
\Rightarrow \Delta E_p &= -\int_{R_{30}}^{R} \vec{F}_G \cdot \mathrm{d}\vec{R}
\end{aligned}$$

Wobei hier $\vec{F}_G = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{R}$ die Gravitationskraft ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta E_p &= -\int_{R_{30}}^{R} \vec{F}_G \cdot \mathrm{d}\vec{R} \\
&= -\int_{R_{30}}^{R} \left(-G\frac{Mm}{R^2}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{R} \\
&= GMm \int_{R_{30}}^{R} \frac{\mathrm{d}R}{R^2} \\
&= -GMm\frac{1}{R}\bigg|_{R_{30}}^{R} \\
&= -GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{30}}\right) \\
&= GMm\left(\frac{1}{R_{30}} - \frac{1}{R}\right)
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Änderung der mechanischen Energie:

$$\begin{aligned}
\Delta E_m &= \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_p \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2\left(R^2 - R_{30}^2\right) + GMm\left(\frac{1}{R_{30}} - \frac{1}{R}\right)
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun Näherungen. Sei $R - R_{30} = \Delta R = 3\,\text{km} \ll R, R_{30}$

$$\begin{aligned}
R^2 - R_{30}^2 &= (R + R_{30}) \cdot (R - R_{30}) \\
&= (R + R - \Delta R) \cdot (R - R + \Delta R) \\
&= (2R - \Delta R) \cdot \Delta R \\
&= 2R\Delta R - \Delta R^2 \\
&\approx 2R\Delta R
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_{30}} - \frac{1}{R} &= \frac{1}{R - \Delta R} - \frac{1}{R} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right) \\
-\frac{1}{R} &= \frac{\Delta R}{R^2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Änderung der mechanischen Energie:

$$\begin{aligned}
\Delta E_m &= \frac{1}{2} m\omega^2 2R\Delta R + GMm\frac{\Delta R}{R^2} \\
&= \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \left(\frac{2\Delta R}{R}\right) + \frac{GMm}{R}\left(\frac{\Delta R}{R}\right) \\
&= E_{\text{kin}} \cdot \left(\frac{2\Delta R}{R}\right) + E_{\text{pot}} \cdot \left(\frac{\Delta R}{R}\right) \\
&= \left(2E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}\right)\frac{\Delta R}{R}
\end{aligned}$$

Mit dem virialsatz gilt:

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} E_{\text{pot}} \\
E_{\text{pot}} &= 2E_{\text{kin}}
\end{aligned}$$

Somit folgt für die Arbeit:

$$\begin{aligned}
W &= 4E_{\text{kin}} \cdot \frac{\Delta R}{R} \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\right)^2 R^2 \cdot \frac{\Delta R}{R} \\
&= 4{,}98 \cdot 10^{11}\,\text{J}
\end{aligned}$$

Somit ist die Leistung:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{W}{\Delta t} \\
&= \frac{4{,}98 \cdot 10^{11}\,\text{J}}{30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s}} \\
&= 1{,}93 \cdot 10^5\,\text{W} \\
&= 193\,\text{kW}
\end{aligned}$$

(b) Nun berechnen wir die Änderung der Geschwindigkeit. Es gilt bei $R = 400\,\text{km}$:

$$v = \omega R$$

und bei $R_{30} = 397\,\text{km}$:

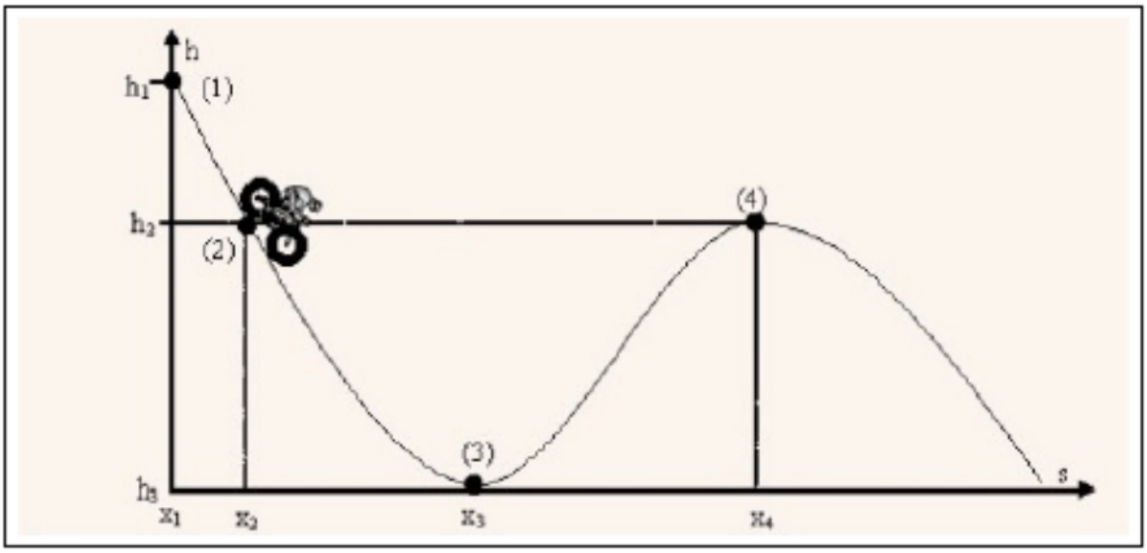
$$V_{30} = \omega R_{30}$$

Daraus folgt für die Änderung der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \omega(R - R_{30}) \\
&= \omega \Delta R \\
&= \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta R \\
&= 0{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. *Energieerhaltung*

Ein Radfahrer rollt ohne zu treten (siehe Abb.) aus der Ruhe in der Höhe h_1 beginnend einen Abhang herunter.



(a) Welche Energieumwandlungen finden bei reibungsfreier Fahrt bis x_3 statt ?

(b) Formulieren Sie den Energieerhaltungssatz mit den Größen $h_1, h_2, h_3, v_1, v_2, v_3$ und v_4 bei reibungsfreier Fahrt. Kennzeichnen Sie die Größen, die den Wert Null besitzen.

(c) Welche Geschwindigkeit erreicht der Radfahrer an den Stellen x_2, x_3 und x_4 bei reibungsfreier Fahrt ? Die Höhen gegenüber h_3 betragen $h_2 = 10\,\mathrm{m}$, $h_1 = 15\,\mathrm{m}$

(d) In welcher Höhe h_h hätte der Radfahrer bei reibungsfreier Fahrt die Hälfte seiner Maximalgeschwindigkeit erreicht ?

Lösung 2.

(a) Es wird permanent potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. In x_1 ist nur potentielle Energie, in x_3 nur kinetische Energie vorhanden.

(b)

$$m \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = m \cdot g \cdot h_3 + \frac{1}{2} m \cdot v_3^3 = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_4^2$$

Hierbei ist $v_1 = 0$ und $h_3 = 0$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_3^2 = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_4^2$$

(c) Geschwindigkeit an Stelle x_2:

$$m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$\Leftrightarrow v_2^2 = (m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2) \frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2g \cdot (h_1 - h_2)} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = 9{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Geschwindigkeit an Stelle x_3:

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot h_1 &= \frac{1}{2} m \cdot v_3^2 \\ \Leftrightarrow v_3 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \\ \Rightarrow v_3 &= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 15\,\mathrm{m}} = 17{,}16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Geschwindigkeit an Stelle x_4:

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 &= m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \\ \Leftrightarrow v_2 = v_4 &= 9{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

(d) Die maximale Geschwindigkeit ist erreicht, wenn die komplette potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wurde, also an der Stelle x_3. An dieser Stelle beträgt die Geschwindigkeit $v_3 = 17{,}16\,\mathrm{m/s}$. Die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit ist damit: $v_h = 8{,}58\,\mathrm{m/s}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \cdot v_h^2 + m \cdot g \cdot h_h &= \frac{1}{2} m \cdot v_3^2 \\ \Leftrightarrow h_h &= \frac{1}{2g}(v_3^2 - v_h^2) \\ \Rightarrow h_h &= 11{,}25\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *Kraft und Energie*

Tarzan, der 688 N wiegt, schwingt sich am Ende einer 18 m langen Liane von einer Klippe. Der senkrechte Abstand zwischen der Klippe und dem tiefsten Punkt von seiner Bahn beträgt 3,2 m. Die Liane reißt, wenn sie einer Kraft ausgesetzt ist, die größer als 950 N ist.

(a) Reißt die Liane ?

(b) Wenn nicht, wie groß ist dann die größte Kraft, die während des Hinunterschwingens auf die Liane wirkt ? Welchen Winkel bildet die Liane mit der senkrechten, falls die reißt ?

Lösung 3.

(a) Um herauszufinden, ob die Liane reißt, reicht es aus, wenn wir die Situation in dem Moment analysieren, in dem Tarzan sich am tiefsten Punkt seiner Bewegung befindet, da die Liane hier die größte Zugspannung ausgesetzt ist- sofern sie nicht zuvor schon gerissen ist. Wir lassen die positive Richtung nach oben zeigen. Auf das Seil wirkt zum einen die Gravitationskraft durch das Gewicht von Tarzan und zum anderen die Zentrifugalkraft durch die Bewegung auf dem Kreisbogen der Schwingbewegung. Das zweite Newtonsche Gesetz liefert uns dann für die Zugkraft auf das Seil

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg$$

Dabei ist der Radius des Kreisbogens durch die Länge der Liane gegeben, also $r = 18\,\mathrm{m}$ und die Masse durch $m = 688\,\mathrm{N}/9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 70{,}2\,\mathrm{kg}$. Die Geschwindigkeit erhalten wir aus der Energieerhaltung. Legen wir den Bezugspunkt für die potentielle Energie an den tiefsten Punkt der Bewegung, ist hier sämtliche potentielle Bewegung vom Anfang der Schwingbewegung in kinetische Energie umgewandelt. Es gilt also:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

mit $h = 3{,}2\,\mathrm{m}$. Kombiniert man die Ergebnisse, so erhält man für die Zugkraft auf das Seil:

$$T = mg + m\frac{2gh}{r} = 933\,\mathrm{N}$$

Die Liane reißt also nicht.

(b) Wie bereits in a) besprochen ist die maximale Zugspannung/Kraft $933\,\mathrm{N}$