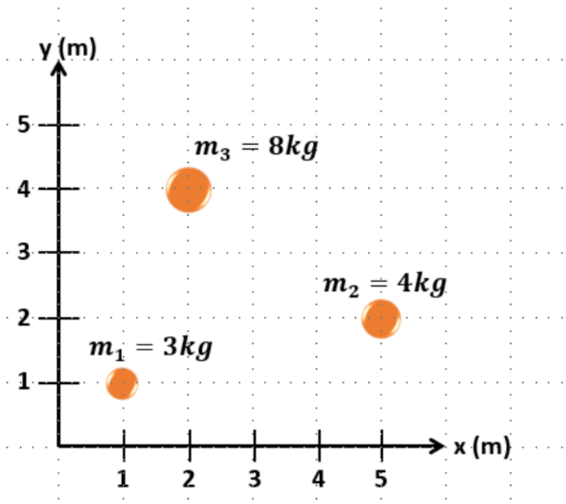
Übungen zur Physik für Chemiker I WS20/21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 6 Lösung

Ausgabe: Mi, 16.12.2020

Aufgabe 1. *Schwerpunkt*
Betrachten Sie das Dreiteilchen-System in der unteren Abbildung.



(a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt dieses Systems.

(b) Wie verändert sich die Lage des Schwerpunkts, wenn die Masse des obersten Teilchens zunimmt ? Betrachten Sie auch den Grenzfall, dass die Masse unendlich groß (bzw. sehr viel größer als die anderen Massen) ist.

Lösung 1.

$$r_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i \qquad \text{mit} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

(a)

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^x \\ r_1^y \end{pmatrix}$$
$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5\,\mathrm{m} \\ 2\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2^x \\ r_2^y \end{pmatrix}$$
$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{m} \\ 4\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3^x \\ r_3^y \end{pmatrix}$$

Betrachte x- und y-Koordinate getrennt voneinander.
x-Koordinate des Schwerpunkts:

$$r_S^x = \frac{m_1 \cdot r_1^x + m_2 \cdot r_2^x + m_3 \cdot r_3^x}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}6\,\mathrm{m}$$

y-Koordinate des Schwerpunkts:

$$r_S^y = \frac{m_1 \cdot r_1^y + m_2 \cdot r_2^y + m_3 \cdot r_3^y}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}9\,\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2{,}6\,\mathrm{m} \\ 2{,}9\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

(b) Wenn die Masse m_3 des obersten Teilchens vergrößert wird, verschiebt sich der Schwerpunkt in Richtung dieses Teilchens. Im Grenzfall, dass m_3 unendlich viel größer ist als die beiden anderen Massen, wandert der Schwerpunkt unendlich nahe an den Ort von m_3 heran.

Aufgabe 2. *Erhaltung des Schwerpunktes*
Ein 4,5 kg schwerer Hund steht auf einem 18 kg schweren Kahn 6,1 m vom Ufer entfernt. Er läuft 2,4 m auf den Bug des Kahns in Richtung Ufer zu und bleibt dann wieder stehen. Wie weit ist er dann von dem Ufer entfernt ? Vernachlässigen Sie dabei die Reibung zwischen Wasser und Kahn.
Bemerkung: Ein Kahn ist die allgemeine Bezeichnung eines für Flüsse, Binnen- und Hafengewässer einsetzbaren kleinen, flachbodigen ungedeckten Wasserfahrzeuges.

Lösung 2.
Die x-Achse habe ihren Ursprung am Ufer und zeige von dort zum Kahn. Die Masse des Hundes sein m_H und die Masse des Kahns m_K. Außerdem ist die Anfangskoordinate des Hundes $x_{0,H}$ und die des Kahns $x_{0,K}$. Dann ist die Koordinate des Schwerpunkts:

$$x_S = \frac{m_K \cdot x_{0,K} + m_H \cdot x_{0,H}}{m_K + m_H}$$

Nun bewegt sich der Hund eine Entfernung d auf dem Kahn in Richtung des Koordinatenursprungs. Die neuen Koordinaten von Hund x_H und Kahn x_K stehen miteinander in Beziehung durch $x_K = x_H + d$, denn schließlich hat sich der Hund auf dem Kahn bewegt. Für den Schwerpunkt gilt also:

$$x_S = \frac{m_K \cdot x_K + m_H \cdot x_H}{m_K + m_H} = \frac{m_K \cdot x_H + m_K \cdot d + m_H \cdot x_H}{m_K + m_H}$$

Da die gesamte äußere Kraft auf das System Kahn-Hund null ist, ändert sich die Geschwindigkeit des Schwerpunktes nicht. Da der Kahn und der Hund anfangs in Ruhe waren, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts null. Der Schwerpunkt bleibt am gleichen Ort, und die beiden Ausdrücke, die wir für x_S formuliert haben, müssen gleich sein. Das bedeutet, dass:

$$m_K x_{0,K} + m_H x_{0,H} = m_K x_H + m_K d + m_H x_H$$

Wir lösen nach x_H auf und erhalten:

$$x_H = \frac{m_K \cdot x_{0,K} + m_H \cdot x_{0,H} - m_K d}{m_K + m_H} = 4{,}18\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 3. *Impuls*
Bei einem Crash-Test kollidiert ein Auto der Masse 2000 kg mit einer Wand. Die Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Autos sind jeweils $\vec{v_0} = (-20\,\mathrm{m/s})\vec{e_x}$ und $\vec{v_f} = (6\,\mathrm{m/s})\vec{e_x}$. Die Kollision dauert 0,4 s.

(a) Wie groß ist der Impuls des Autos vor und nach der Kollision und wie groß ist die durchschnittliche Kraft, die auf das Auto wirkt ?

(b) Angenommen das Auto würde nicht zurück federn, aber die Dauer der Kollision bleibt 0,4 s. Wäre die Kraft auf das Auto dann größer oder kleiner ?

Lösung 3.
(a) Der Anfangs- und Endimpuls des Autos sind gegeben durch:

$$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 = (-40 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}})\vec{e}_x$$

und

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = (12 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}})\vec{e}_x$$

Die Veränderung des Impulses des Autos ist gleich dem Impuls der netto Kraft, die auf das Auto wirkt. Die Veränderung ist

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0$$

Also $\vec{I} = (52 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m/s})\vec{e}_x$.
Die durchschnittliche Kraft, die die Wand auf das Auto ausübt ist

$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = (130 \cdot 10^3\,\mathrm{N})\vec{e}_x$$

(b) In der oberen Betrachtung federt das Auto zurück. Die Kraft sorgt in dem Zeitintervall also für zwei Dinge. Erst stoppt sie das Auto und dann beschleunigt sie das Auto in die andere Richtung, so dass es sich mit 6 m/s bewegt. Wenn das Auto nicht zurück federt, stoppt die Kraft nur das Auto. Wir erwarten also eine kleinere Kraft. Mathematisch beschrieben erhalten wir

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0 = 0 - \vec{p}_0$$

Also $\vec{I} = (40 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m/s})\vec{e}_x$. Die durchschnittliche Kraft durch die Wand auf das Auto ist

$$\vec{F}_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = (100 \cdot 10^3\,\mathrm{N})\vec{e}_x$$

Wie erwartet ist die Kraft kleiner als im ersten Fall.

Aufgabe 4. *Zwei Körper-Kollision mit Feder*

Ein Block der Masse $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$ bewegt sich anfänglich mit einer Geschwindigkeit von $8\,\mathrm{m/s}$ auf einer reibungsfreien Fläche nach rechts. Er kollidiert dann mit einer Feder, die an einem zweiten Block der Masse $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$ befestigt ist und der sich zunächst mit einer Geschwindigkeit von $4\,\mathrm{m/s}$ nach links bewegt (siehe Abbildung). Die Federkonstante ist $600\,\mathrm{N\,m}$.

(a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Blöcke nach der Kollision ?

(b) Zu einem Zeitpunkt der Kollision bewegt sich m_1 mit einer Geschwindigkeit von $3\,\mathrm{m/s}$ nach rechts. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Blocks der Masse m_2 zu diesem Zeitpunkt und bestimmen Sie wie weit die Feder an diesem Zeitpunkt zusammengedrückt ist.

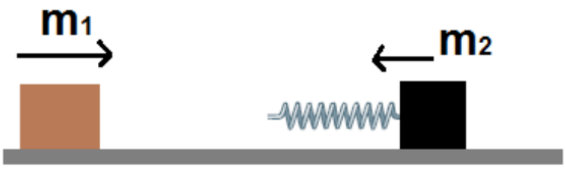


Abbildung 1: Ein nach rechts rutschender Block kollidiert mit einer Feder, die an einem nach links rutschenden Block befestigt ist.

Lösung 4.

(a) Da die Federkraft eine konservative Kraft ist, wird während der Kompression keine kinetische Energie in innere Energie umgewandelt. Somit ist der Stoß elastisch.
Aufgrund der Impulserhaltung gilt:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

einsetzen der Werte ergibt

$$2v_{1f} + 3v_{2f} = 4$$

für den elastischen Stoß ist bekannt, dass

$$v_{10} - v_{20} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

und somit

$$v_{2f} - v_{1f} = 12$$

Löst man oberes Gleichungssystem erhält man $v_{1f} = -6{,}4\,\mathrm{m/s}$ und $v_{2f} = 5{,}6\,\mathrm{m/s}$

(b) Da während der ganzen Kollision die mechanische Energie und der Impuls der beiden Blöcke erhalten bleibt, kann man den Stoß zu jedem Zeitpunkt als elastischen Stoß behandeln. Wir wählen den Zeitpunkt, an dem sich der Block m_1 mit einer Geschwindigkeit von $3\,\mathrm{m/s}$ bewegt, wie in der Abbildung unten gezeigt ist, also

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Durch Auflösen nach v_{2f} und einsetzen der Werte erhält man $v_{2f} \approx 1{,}6\,\mathrm{m/s}$. Der positive Wert von v_{2f} zeigt, dass der Block zu diesem Zeitpunkt nach rechts rutscht.

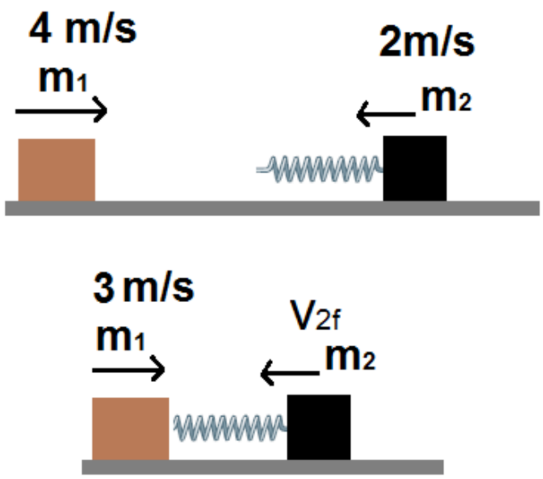
In dem System aus den zwei Blöcken und der Feder wirkt keine Reibung oder eine andere nicht-konservative Kraft, somit ist die mechanische Energie erhalten.

$$K_0 + U_0 = K_f + U_f$$

oder

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2$$

Auflösen nach x und einsetzen der Werte ergibt, dass sich die Feder um $x \approx 0{,}108\,\mathrm{m}$ zusammendrückt.



Aufgabe 5. *Impulserhaltung des Schwerpunktes*
Eine Granate wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ unter einem Winkel von 60° bezüglich der Horizontalen abgeschossen. Am höchsten Punkt der Flugbahn explodiert das Geschoss in zwei Bruchstücke gleicher Masse. Die Geschwindigkeit eines der Teile ist unmittelbar nach der Explosion gleich Null und das Teil stürzt senkrecht nach unten ab. Wie weit von dem Granatwerfer entfernt trifft das zweite Teil auf ?
Nehmen Sie an, der Boden sei eben und die Luftreibung vernachlässigbar.

Lösung 5.
Die Granate explodiert am Gipfel ihrer Flugbahn in zwei Fragmente. Wenn wir die Bewegung des einen Bruchstücks kennen, können wir mithilfe der Impulserhaltung auch die Bewegung des zweiten Bruchstücks erschließen.
Wir müssen die Koordinaten des Punktes, an dem die Granate explodiert, sowie die Geschwindigkeit des zweiten Bruchstücks (das nicht nach unten abstürzt) bestimmen. Den Koordinatenursprung legen wir an die Abschussstelle, die x-Achse soll nach rechts zeigen und die y-Achse nach oben. Die y-Komponente der Geschwindigkeit der Granate ist $v_y = v_{0,y} - gt$ und wird für $t = v_{0,y}/g = (v_0 \sin(\theta))/g$ gleich null, wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit der Granate und θ der Abschusswinkel ist. Die Koordinaten des höchsten Punktes der Flugbahn

lauten dann:

$$x = v_{0,x}t = (v_0 \cos(\theta))t = \frac{v_0^2}{g} \sin(\theta)\cos(\theta) = 17{,}7\,\mathrm{m}$$
$$y = v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \sin^2(\theta) = 15{,}3\,\mathrm{m}$$

Da keine horizontalen Kräfte wirken, bleibt die horizontale Komponente des Impulses erhalten. Da außerdem ein Bruchstück der Granate nach der Explosion die Geschwindigkeit null besitzt, entspricht der Impuls des zweiten Bruchstücks nach der Explosion dem Impuls der ganzen Granate vor der Explosion. Am höchsten Punkt der Flugbahn ist die Geschwindigkeit der Granate $v_0 \cos(\theta)$ in der positiven x-Richtung. Wenn M die Masse der Granate und u_0 die Geschwindigkeit des Bruchstücks nach der Explosion ist, gilt:

$$Mv_0 \cos(\theta) = \frac{M}{2}u_0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 2v_0 \cos(\theta) = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

weil die Masse des Bruchstücks die halbe Gesamtmasse besitzt.
Nun stellen wir die Uhr neu und analysieren jetzt die Flugbahn eines Projektils, das zur Zeit $t = 0$ an der Position $x_0 = 17{,}7\,\mathrm{m}$ und $y_0 = 15{,}3\,\mathrm{m}$ mit einer Geschwindigkeit von $20\,\mathrm{m/s}$ horizontal abgeschossen wird. Seine y-Komponente folgt der Gleichung:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

und für die Aufschlagstelle gilt $y = 0$. Der Zeitpunkt des Einschlags ist also:

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

und die zugehörige x-Komponente der Aufschlagstelle ist:

$$x = x_0 + u_0 t = x_0 + u_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 53\,\mathrm{m}$$

Bemerkung: Ohne Explosion wäre die Granate mit der Masse M bei $R = 2x_0 = 35{,}2\,\mathrm{m}$ eingeschlagen, also deutlich früher. Der Grund ist, dass das Fragment eine kleinere Masse, aber größere Horizontalgeschwindigkeit als die vollständige Granate besitzt und daher weiter fliegen kann.