

---

# Übungen zur Physik für Chemiker I WS20/21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 7 Lösung

Ausgabe: Mi, 06.01.2021

---

## Aufgabe 1. *Trägheitsmomente*

Berechnen Sie die Trägheitsmomente von:

- (a) Einer Vollkugel
- (b) Einer Hohlkugel

in Abhängigkeit von der Masse  $M$  und des Radius  $R$  (Bei der Hohlkugel ist  $R_1$  der Innenradius und  $R_2$  der Außenradius).

- (c) Eines Stabes der Länge  $L \gg$  Durchmesser  $d$ , der um eine senkrechte Achse am Ende des Stabes rotiert

Die Dichten sind alle homogen.

*Hinweis:* Es gilt  $\int \sin^3(\theta) d\theta = \frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta)$ .

*Beachten Sie bei Teilaufgabe (c) den Satz von Steiner.*

## Lösung 1.

- (a) Wir berechnen das Trägheitsmoment in Kugelkoordinaten:

$$r \in [0, R] \quad \theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Der Abstand der Drehachse wird nur durch die  $x$ - und  $y$ -Komponente bestimmt. Es ist also:

$$r_{\perp}^2 = r_x^2 + r_y^2 = r^2 \sin^2(\theta) \cdot (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = r^2 \sin^2(\theta)$$

Das Volumenelement für Kugelkoordinaten ist  $dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$ .

$$\begin{aligned}
 I &= \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV \\
 &= \rho_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin^2(\theta) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \\
 &= \rho_0 \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta \\
 &\stackrel{\text{Hinweis}}{=} \rho_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{5} R^5 \left[ \frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2\pi\rho_0}{5} R^5 \left[ \frac{-1}{3} - (-1) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \right] \\
 &\stackrel{\rho_0 = \frac{M}{V}}{=} \frac{2\pi M}{5V} R^5 \cdot \frac{4}{3} \\
 &\stackrel{V_K = \frac{4}{3}\pi R^3}{=} \frac{2\pi M}{5} R^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\
 &= \frac{2}{5} MR^2
 \end{aligned}$$

(b) Hohlkugel:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV \\
 &= \rho_0 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin^2(\theta) r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\
 &= 2\pi\rho_0 \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta \\
 &= 2\pi\rho_0 \frac{1}{5} (R_2^5 - R_1^5) \left[ \frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2\pi}{5} \rho_0 (R_2^5 - R_1^5) \frac{4}{3} = \frac{2\pi}{5} (R_2^5 - R_1^5) \frac{M}{V} \frac{4}{3} \\
 &\stackrel{V = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{=} \frac{2}{5} M \frac{(R_2^5 - R_1^5)}{(R_2^3 - R_1^3)}
 \end{aligned}$$

(c) Stab:

Zuerst  $I$  im Schwerpunkt bestimmen:

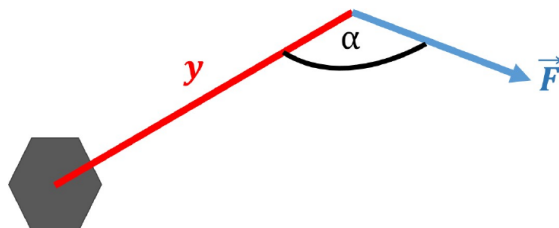
$$\begin{aligned}
 I_S &= \rho \int_V x^2 dV = \rho A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx \\
 &= \frac{1}{12} \rho A L^3 = \frac{1}{12} M L^2
 \end{aligned}$$

Nun  $I$  von Achse am Ende des Stabes bestimmen mit dem Satz von Steiner. Die Achse am Ende des Stabes ist  $\frac{L}{2}$  vom Schwerpunkt des Stabes entfernt.

$$I_B = I_S + M \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{4} M L^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

## Aufgabe 2. Drehmoment

- (a) Eine Schraube soll mit einem Hebel gedreht werden. Die anliegende Kraft variiert in ihrer Größe und ihrem Winkel, die Länge des Hebels ist auch unterschiedlich. Berechnen Sie für die folgenden 4 Varianten das Drehmoment.



$$y_1 = 1 \text{ m} \quad \alpha_1 = 90^\circ \quad F_1 = 10 \text{ N}$$

$$y_2 = 0,5 \text{ m} \quad \alpha_2 = 120^\circ \quad F_2 = 8 \text{ N}$$

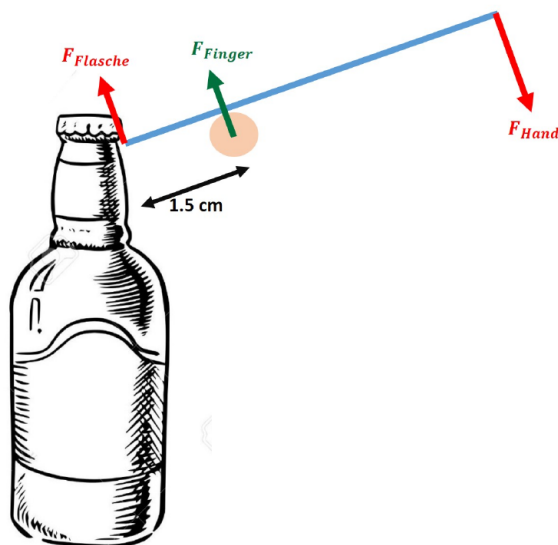
$$y_3 = 1,1 \text{ m} \quad \alpha_3 = 60^\circ \quad F_3 = 15 \text{ N}$$

$$y_4 = 2 \text{ m} \quad \alpha_4 = 220^\circ \quad F_4 = 2 \text{ N}$$

- (b) Wir möchten nach dieser anstrengenden Aufgabe nun ein Kaltgetränk öffnen was mit einem Kronkorken verschlossen ist. Am Rand des Kronkorkens muss eine Kraft von  $F_{\text{Flasche}} = 1000 \text{ N}$  aufgebracht werden, um die Flasche zu öffnen. Dazu benutzen wir erst einen Zollstock der Länge  $d_Z = 20 \text{ cm}$ . Die Flasche wird mit einer Hand umfasst. Der Zollstock wird über einen Finger gehebelt, welcher  $r = 1,5 \text{ cm}$  vom Angriffspunkt am Kronkorken entfernt ist.

Berechnen Sie die benötigte Kraft, die am Ende des Zollstocks aufgebracht werden muss. Welche Kraft muss durch den Finger als Hebelpunkt aufgebracht werden, sodass der Punkt sich nicht bewegt ?

Berechnen Sie beides noch einmal für ein Feuerzeug der Länge  $d_F = 7 \text{ cm}$ .



## Lösung 2.

- (a) Das Drehmoment berechnet sich aus dem Kreuzprodukt zwischen Abstand  $\vec{r}$  und der Kraft  $\vec{F}$ . Wir wählen das Koordinatensystem so, dass  $\vec{r}$  genau auf der  $y$ -Achse liegt. Dann ist  $F_x = F \cdot \cos(\alpha - 90^\circ)$  und  $F_y = F \cdot \sin(\alpha - 90^\circ)$ .

$$\begin{aligned} M &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F \cdot \cos(\alpha - 90^\circ) \\ F \cdot \sin(\alpha - 90^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -y \sin(\alpha) F \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Wir können jetzt die verschiedenen Konfigurationen durchrechnen:

$$\begin{aligned} M_1 &= -1m \sin(90^\circ) \cdot 10N \cdot \vec{e}_z = -10 \text{ N m} \cdot \vec{e}_z \\ M_2 &\approx -3,46 \text{ N m} \cdot \vec{e}_z \\ M_3 &\approx -14,3 \text{ N m} \cdot \vec{e}_z \\ M_4 &\approx 2,57 \text{ N m} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Anzumerken:  $M_1, M_2, M_3$  drehen rechts herum,  $M_4$  in die andere Richtung, daher auch kein negatives Ergebnis.

- (b) Zunächst berechnen wir die Kraft, die am Ende des Zollstocks aufgebracht werden muss. Dafür müssen die Drehmomente im Drehpunkt (Finger) exakt gleich groß sein.

$$\begin{aligned} F_{Flasche} \cdot r &\stackrel{!}{=} F_{Hand} \cdot (d_z - r) \\ F_{Hand} &= F_{Flasche} \cdot \frac{r}{d_z - r} \\ &= 1000 \text{ N} \cdot \frac{1,5 \text{ cm}}{20 \text{ cm} - 1,5 \text{ cm}} \approx 81 \text{ N} \end{aligned}$$

Wir können nun die Kraft berechnen, die durch den Hebel auf den Hebelpunkt (Finger) ausgewirkt wird. Dabei generiert der Finger eine Kraft, sodass das Drehmoment entgegengesetzt gleich dem Drehmoment der Hand ist.

$$\begin{aligned} F_{Hand} \cdot d_z &= -F_{Finger} \cdot r \\ F_{Finger} &= -F_{Hand} \cdot \frac{d_z}{r} \\ &= -F_{Flasche} \frac{r}{d_z - r} \frac{d_z}{r} \\ &= -F_{Flasche} \frac{d_z}{d_z - r} \\ &= -1000 \text{ N} \frac{20 \text{ cm}}{20 \text{ cm} - 1,5 \text{ cm}} \approx -1081 \text{ N} \end{aligned}$$

Dieselben Berechnungen können wir jetzt auch für ein Feuerzeug durchführen mit  $d_F = 7 \text{ cm}$ .

$$\begin{aligned} F_{Hand} &= 273 \text{ N} \\ F_{Finger} &= -1273 \text{ N} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3. Drehimpuls**

(a) Eine Punktmasse der Masse  $m = 10 \text{ kg}$  befindet sich auf einer Kreisbahn um eine feste Drehachse. Sie rotiert mit einer Drehzahl von 20 Umdrehungen pro Sekunde. Berechnen Sie den Drehimpuls der Punktmasse.

(b) Beachten Sie, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist. Ein Stern habe den Radius von 700 000 km und rotiert in 27 Tagen einmal um sich selbst. Am Ende seines Lebenszyklus schrumpft er zu einem sogenannten „weißen Zwerg“ mit einem Radius von 7000 km. Wie groß ist nun die Rotationsdauer, wenn man annimmt, dass der Schrumpfungsprozess ohne Masseverlust abläuft? Das Trägheitsmoment einer Vollkugel ist  $I = \frac{2}{5}MR^2$

(c) Berechnen Sie jeweils den Drehimpuls um den Koordinatenursprung für die folgenden Ortsvektoren und Impulse:

(i)

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Lösung 3.**

(a)

$$L = I \cdot \omega = mr^2\omega = mr^2 \frac{2\pi \cdot 20}{1 \text{ s}} = 400\pi r^2$$

Mit  $r = 1 \text{ m}$  (war nicht in der Aufgabe gegeben):

$$L = 400\pi \cdot r^2 = 400\pi \cdot (1 \text{ m})^2 = 1,3 \text{ kJ s}$$

Mit  $r = 2 \text{ m}$  wäre der Drehimpuls 4-mal so groß wie zuvor.

(b)

$$L = I \cdot \omega = I \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{5}mr^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$L_1 = L_2 \Rightarrow \frac{2}{5}mr_1^2 \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2}{5}mr_2^2 \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \frac{r_1^2}{T_1} = \frac{r_2^2}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot T_1 \approx 3.88 \text{ min}$$

(c)

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 6 & -0 \\ 40 & -3 \end{pmatrix} \text{Js} = \begin{pmatrix} -16 \\ 6 \\ 37 \end{pmatrix} \text{Js}$$

$$\vec{L}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{Js}$$

$$\vec{L}_3 = \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \text{Js}$$

#### Aufgabe 4. Rotationsenergie

Berechnen Sie für die in Abbildung 1 gezeigte Vollkugel die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts  $\vec{v}_{cm}$  am Ende der Steigung und die Translationsbeschleunigung des Schwerpunkts. Was passiert, wenn zwei Vollkugeln mit gleicher Masse  $m$ , aber unterschiedlichen Radien  $r$  und  $R$  gleichzeitig die Steigung herunter rollen? (Sei  $r < R$ )

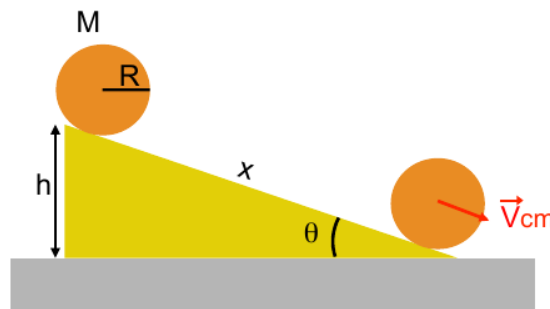


Abbildung 1: Eine Vollkugel rollt eine Steigung herunter.

#### Lösung 4.

Die Vollkugel auf der Steigung führt gleichzeitig eine Rotations- und Translationsbewegung aus. Die komplexe Bewegung lässt sich einfach durch eine Kombination aus Rotation und Translation in Bezug zum Schwerpunkt des starren Objekts ausdrücken, wenn die Kugel kein bisschen rutscht (also reines Rollen vorliegt). Unter Vernachlässigung von Rollreibung kann man Energieerhaltung benutzen um das Problem zu lösen. Die Kugel startet aus der Ruhe und rollt auf das null Level der potentiellen Energie:

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + 0$$

Auf der rechten Seite der Gl. (2), definiert der erste Term die Rotationsenergie der Kugel für reines Rollen während der zweite Term die kinetische Energie des Schwerpunkts aufgrund der Translation ist. Benutzt man  $v_{CM} = \omega R$  für die Rollbewegung, ist die Endtranslationsgeschwindigkeit:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2MghR^2}{I_{CM} + MR^2}}$$

durch einsetzen erhält man:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

Die Kugel bewegt sich nur aufgrund der Gravitationskraft die Steigung herunter, also mit einer gleichmäßig beschleunigten linearen Bewegung. Platziert man die  $xy$ -Ebene auf den Schwerpunkt der Kugel oben auf der Steigung und wendet die Bewegungsgleichungen an erhält man:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

Die Zeit  $t$ , wenn die Kugel das untere Ende erreicht wird mittels  $t = \frac{v_{CM}}{a}$  berechnet, dabei ist  $x$  die Länge der Steigung. Es gilt  $\sin(\alpha) = \frac{h}{x}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a \frac{v_{CM}^2}{a^2} \\ &= \frac{v_{CM}^2}{2a} \\ &= \frac{2MghR^2}{2(I + MR^2)a} \\ &= \frac{gh}{\left(\frac{I}{MR^2} + 1\right)a} \\ \Rightarrow a &= \frac{gh}{\left(\frac{I}{MR^2} + 1\right)x} \\ &= \frac{g \sin(\alpha)}{\left(\frac{I}{MR^2} + 1\right)} \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht von der Masse und des Radius der Kugel abhängt. Somit erfahren alle Vollkugeln die gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einer gegebenen Steigung !

(a) Wenn das Objekts nicht rotiert ist sein Trägheitsmoment null und man erhält:

$$v_{CM} = \sqrt{2gh}$$

Auf einer reibungsfreien Fläche würde ein nicht rotierendes Objekt (z.B. eine Box) vor der Kugel ankommen!

(b) Wie vorhin bemerkt hängt die Endgeschwindigkeit nicht von der Masse der Vollkugel ab: Beide Vollkugeln würden zur gleichen Zeit ankommen.