Übungen zur Physik für Chemiker I WS20/21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 8 Lösung

Ausgabe: Mi, 13.01.2021

Aufgabe 1. *Elastizität*
Der Elastizitätsmodul E für einen Stab soll durch einen Zugversuch ermittelt werden. Hierzu wird ein Rundstab mit einem Durchmesser von $d = 10\,\mathrm{mm}$ und einer Anfangsmesslänge $l_0 = 50\,\mathrm{mm}$ verwendet. Auf der geradlinig verlaufenden Stabachse wirkt eine Kraft $F = 10\,\mathrm{kN}$. Diese Kraft F führt dazu, dass der Stab sich um $\Delta l = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ verlängert.

(a) Wie groß ist die Zugspannung σ ?

(b) Wie groß ist die elastische Dehnung ϵ ?

(c) Welchen Wert besitzt der Elastizitätsmodul E ?

Hinweis: Die Zugspannung σ ist gleich $\frac{F}{A}$. Die elastische Dehnung ϵ ist gleich dem Verhältnis von $\frac{\Delta l}{l_0}$. Somit gilt laut der Vorlesung:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \epsilon$$

Lösung 1.
(a) Berechnung der Zugspannung $\sigma = \frac{F}{A_0}$.
Die Querschnittsfläche A_0 bei einem Rundstab ist kreisförmig und wird berechnet durch:

$$A_0 = r^2 \cdot \pi = (\frac{d}{2})^2 \cdot \pi = (5\,\mathrm{mm})^2 \cdot \pi = 78{,}54\,\mathrm{mm}^2$$

Die Kraft F ist in kN angegeben und wird umgerechnet in N:

$$F = 10\,\mathrm{kN} = 10\,000\,\mathrm{N}$$

Die Berechnung der Zugspannung erfolgt dann mit:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} = 127{,}32\,\mathrm{N/mm}^2$$

(b) Berechnung der Dehnung

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0{,}5\,\mathrm{mm}}{50\,\mathrm{mm}} = 0.01 = 1\%$$

(c) Berechnung des Elastizitätsmoduls:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F \cdot l_0}{A_0 \cdot \Delta l} = 12\,732{,}37\,\mathrm{N/mm^2}$$

Aufgabe 2. *Harmonische Schwingung eines Federpendels*
Ein Federpendel schwingt entlang der y-Richtung. Die Position wird dabei durch die Gleichung $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ beschrieben. Dabei ist A die Amplitude, also die maximale Auslenkung des Pendels, und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz mit der Periodendauer T. Die Periodendauer T ist die Zeit, die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt, also bis der Pendelkörper aus der Auslenkung die Ruhelage zum zweiten Mal durchquert. Im Folgenden sei $T = 0{,}6\,\mathrm{s}$ und $A = 10\,\mathrm{cm}$. Zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ befinde sich das Pendel in der Ruhelage $y = 0\,\mathrm{cm}$.

(a) Wo befindet sich der Pendelkörper nach einer Sekunde ?

(b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Pendelkörper in der Ruhelage ? Was zeichnet diese Geschwindigkeit aus ?

(c) Wo wird der Pendelkörper am stärksten beschleunigt ?

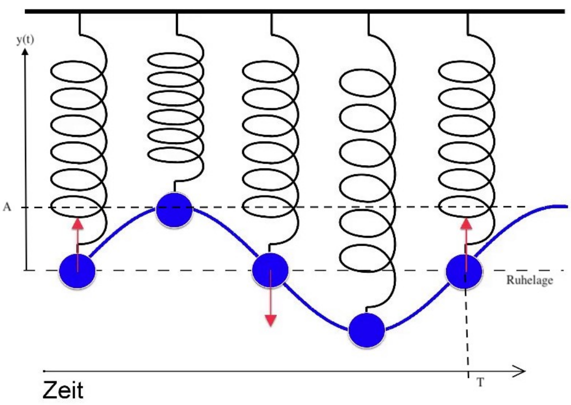

Abbildung 1: https://www.youtube.com/watch?v=JGY8HytPE6M

Lösung 2.
Mit den Werten aus der Aufgabenstellung erhält man für die Auslenkung:

$$y(t) = 10\,\mathrm{cm}\sin(\frac{2\pi}{0.6s}t)$$

Außerdem gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
y(t) &= A\sin(\omega t) \\
v(t) &= \frac{dy}{dt} = \omega A\cos(\omega t) \\
a(t) &= \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t) = -\omega^2 y(t)
\end{aligned}$$

(a) Die Position des Pendelkörpers nach einer Sekunde erhält man durch einsetzen:

$$y(1\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{cm}\sin(\frac{2\pi}{0.6s}1\,\mathrm{s}) = -8{,}66\,\mathrm{cm}$$

(b) In der Ruhelage erreicht der Pendelkörper seine maximale Geschwindigkeit. Formal sieht man dies, wenn man in der Gleichung für die Geschwindigkeit für t ganze Vielfache der Periodendauer T einsetzt, denn genau dann befindet sich der Probekörper in der Ruhelage und das Argument im Kosinus ist ein Vielfaches von 2π. Für alle ganzzahligen Vielfache von 2π ist der Kosinus aber immer eins. Damit gilt:

$$v_{max} = \omega A = 1{,}047\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(c) Die Beschleunigung a wird maximal, wenn die Ableitung verschwindet:

$$\frac{da}{dt} = -\omega^3 A\cos(\omega t) \stackrel{!}{=} 0$$

Nur der Kosinus kann verschwinden. Das ist genau dass der Fall, wenn das Argument ein ungerades halbzahliges Vielfaches von π also $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$ ist. An diesen Werten ist der Sinus immer betraglich gleich 1. Dann ist $y(t) = A \cdot 1$, also maximal. Dies bedeutet, dass die maximale Beschleunigung an den Umkehrpunkten herrscht.

Aufgabe 3. *Gekoppelte Schwingung*

Betrachten Sie ein System von zwei miteinander gekoppelten Massen $m_1 = m_2 = m$, die jeweils mit einer Feder an eine Wand (Federkonstante $D_1 = D_2 = D$) und miteinander über eine Feder mit Federkonstante D_{12} gekoppelt sind (siehe Abbildung 1).

(a) Stellen Sie eine Bewegungsgleichung für beide Massen auf.

(b) Finden Sie eine geeignete Transformation der Koordinaten, um die voneinander abhängigen Variablen x_1 und x_2 zu entkoppeln.

(c) Lösen Sie nun die Gleichungen.

(d) Transformieren Sie das Ergebnis nun wieder zu den Anfangsvariablen um.

(e) Bestimmen Sie nun die halbe Schwebungsperiode $\tau = \frac{T}{2}$ und betrachten Sie die zwei Spezialfälle (beide Systeme Schwingen in Phase und gegenphasig).

Die halbe Schwebungsperiode gibt die Zeit an, in der die Schwingungsenergie vom ersten auf das zweite Pendel und wieder zurück übertragen wird. Die halbe Schwebungsperiode ist also die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels.

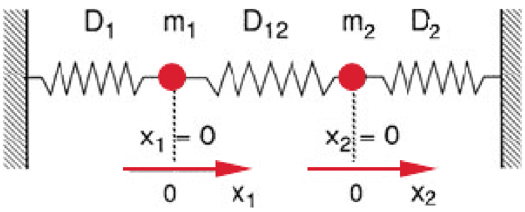

Abbildung 2: Zwei gekoppelte Federpendel

Lösung 3.

Sind zwei Massenpunkte m_1 bzw m_2 durch Federn mit den Rückstellkonstanten D_1 bzw. D_2 an ihre Ruhelagen $x_1 = 0$ bzw $x_2 = 0$ gebunden und außerdem durch eine Feder mit der Federkonstanten D_{12} miteinander verbunden, so wird die Ausdehnung der mittleren Feder von den jeweiligen Positionen x_i beider Massen abhängen. Deshalb hängt auch die Kraft auf jede Masse nicht nur von ihrer eigenen Position, sondern auch von der der anderen Masse ab. Die beiden schwingenden Systeme sind also miteinander gekoppelt.

(a) Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -D_1x_1 - D_{12}(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -D_2x_2 - D_{12}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

wobei x_1 und x_2 die Auslenkungen aus den jeweiligen Ruhelagen bedeuten. Die Gleichungen stellen ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem dar, weil jede der beiden Gleichungen beide Variablen x_1 und x_2 enthält.

(b) Durch eine geeignete Variablensubstitution gelingt es oft, gekoppelte DGLs zu entkoppeln. Wenn man nun beide Gleichungen miteinander addiert oder subtrahiert, erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -D(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -D(x_1 - x_2) - 2D_{12}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Man wähle also die neuen Koordinaten so:

$$\begin{aligned} \xi^+ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \xi^- &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Somit hat man zwei voneinander unabhängige DGLs:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{\xi^+} &= -D \cdot \xi^+ \\ m \cdot \ddot{\xi^-} &= -(D + 2D_{12}) \cdot \xi^- \end{aligned}$$

(c) Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\begin{aligned} \xi^+(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \xi^-(t) &= A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

mit $\omega_1^2 = D/m$ und $\omega_2^2 = (D + 2D_{12})/m$

(d) Für gleiche Amplituden $A_1 = A_2 = A$ lassen sich durch Rücktransformation auf die x-Koordinaten x_1, x_2 die Schwingungen der Massenpunkte im x-Raum darstellen als:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\xi^+ + \xi^-) = A[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \\ &= 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \\ x_2 &= (\xi^+ - \xi^-) = A[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \\ &= -2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

(e) Die halbe Schwebungsperiode ist gegeben durch:

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\left(\sqrt{\frac{D+2D_{12}}{m}} - \sqrt{\frac{D}{m}}\right)}$$

Man betrachte nun beide Spezialfälle:

(i) In Phase:

$$\xi^- = 0, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \qquad \text{und} \qquad A_1 = A_2$$
$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) = \xi^+(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

(ii) gegenphasig, d.h. $x_1 = -x_2$:

$$\xi^+ = 0, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \qquad \text{und} \qquad A_1 = -A_2$$
$$\Rightarrow x_1(t) = -x_2(t) = \xi^-(t) = A_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi)$$