Übungen zur Physik für Chemiker I WS20/21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 9 Lösung

Ausgabe: Mi, 20.01.2021

Aufgabe 1. *Gedämpfte Oszillation*
Ein 10,6 kg Objekt oszilliert am Ende einer vertikalen Feder mit einer Federkonstante von $2{,}05 \cdot 10^4\,\mathrm{N/m}$. Der Effekt des Luftwiderstandes ist durch den Dämpfungskoeffizienten $b = 3\,\mathrm{N\,s/m}$ repräsentiert.

(a) Berechnen Sie die Frequenz der gedämpften Schwingung.

(b) Um welchen Prozentsatz wird die Amplitude nach jedem Zyklus verringert ?

(c) Bestimmen Sie das Zeitintervall, in dem die Energie des Systems um 5% des Anfangswerts gefallen ist.

Lösung 1.
Die Bewegungsgleichung für eine gedämpfte harmonische Oszillation und ihre Winkelgeschwindigkeit sind gegeben durch:

$$x(t) = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

(a) Man sieht, dass die Winkelfrequenz der gedämpften Oszillation von der natürlichen Frequenz minus der Dämpfungskonstante abhängt. Da alle Parameter in SI-Einheiten angegeben werden, ist $\omega = 43{,}98\,\mathrm{rad/s}$ und die Frequenz ist gleich:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = 7\,\mathrm{Hz}$$

(b) In einem gedämpften Oszillator hängt die Amplitude exponentiell von der Zeit t ab. Eine Periodendauer ist $T = \frac{1}{f} = 0{,}1428\,\mathrm{s}$.

$$\frac{A(t)}{A(0)} = \frac{Ae^{-(b/2m)T}}{A} = e^{-0.02} = 0.98$$

Nach jeder ganzen Schwingung nimmt die Amplitude um 2% ab.

(c) Die Energie eines ungedämpften Oszillators ist konstant: $E = \frac{1}{2}\kappa A^2$. Da die Amplitude $A(t)$ des gedämpften Oszillators exponentiell mit der Zeit abfällt, ist auch die mechanische Energie nicht mehr erhalten:

$$\frac{E(t)}{E(0)} = \frac{A(t)^2}{A(0)^2} = 0.95$$
$$e^{-(b/m)t} = 0.95$$
$$t = -\frac{m}{b} \cdot ln(0.95) = 0{,}18\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 2. *Erzwungene Schwingung*

Ein 4 kg Objekt, das an einer Feder befestigt ist, bewegt sich ohne Reibung und wird durch eine externe Kraft von $F = (6\,\mathrm{N})\sin(2\pi t)$ angetrieben. Die Federkonstante der Feder ist $20\,\mathrm{N/m}$.
Bestimmen Sie die Periodendauer und Amplitude der Bewegung.

Lösung 2.

Das Objekt bewegt sich ohne Reibung ($b = 0$). Angenommen es wurde ein stabiler Zustand erreicht und die Oszillation hat eine über die Zeit konstante Amplitude A. Die Bewegungsgleichung für eine erzwungene Schwingung ist gegeben durch $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, wobei A von der Amplitude der angewendeten Kraft F_0 und von der natürlichen Winkelfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ des Oszillators abhängt:

$$ma = F_0 \sin(\omega t) - \kappa x$$
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}}$$

Der angetriebene Oszillator schwingt mit der Winkelfrequenz der treibenden Kraft $\omega = 2\pi$. Damit können die Amplitude und Periodendauer berechnet werden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1\,\mathrm{s}$$
$$A = \frac{6\,\mathrm{N}/4\,\mathrm{kg}}{\sqrt{\left(4\pi^2 - \frac{20\,\mathrm{N/m}}{4\,\mathrm{kg}}\right)^2}} = 0{,}04\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 3. *Erzwungene Schwingung mit Dämpfung*

Gegeben sei ein Oszillationssystem mit einem Objekt der Masse $m = 15\,\mathrm{g}$. Die Eigenfrequenz ist $\omega = 13{,}5/\mathrm{s}$ und die Dämpfungskonstante sei $\gamma = 0{,}684/\mathrm{s}$. Das System wird durch eine Erregerschwingung mit der Kraftamplitude $F_{Err} = 0{,}02\,\mathrm{N}$ und der Erregerfrequenz $\omega_E = 10/\mathrm{s}$ zum Schwingen angeregt.

(a) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung.

(b) Bestimmen Sie die Amplitude der Erregerschwingung.

(c) Wenn der Dämpfungskoeffizient γ doppelt so groß ist, wieviel größer muss die Kraft sein, um die Amplitude konstant zu halten ?

Lösung 3.

(a) Zur Bestimmung der Phasenverschiebung wird die folgende Gleichung verwendet:

$$\varphi_E(\omega_E) = \arctan\left(\frac{2\gamma \cdot \omega_E}{\omega^2 - \omega_E^2}\right)$$

Einsetzen der Werte liefert:

$$\varphi_E(\omega_E) = \arctan\left(\frac{2 \cdot 0.684 \cdot 10}{(13.5)^2 - (10)^2}\right) = 0{,}165\,\mathrm{rad} = 9{,}45°$$

(b) Die Bestimmung der Amplitude der Erregerfunktion ergibt sich durch die Gleichung:

$$A_{Err}(\omega_E) = \frac{F_{Err}}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}}$$

Einsetzen der Werte liefert:

$$A_{Err}(\omega_E) = \frac{0{,}02\,\mathrm{N}}{0{,}015\,\mathrm{kg}}\frac{1}{\sqrt{((13.5)^2 - (10)^2)^2 + 4 \cdot (0.684)^2 \cdot (10)^2}} = 0{,}016\,\mathrm{m}$$

(c) Es gilt nun $\gamma_{neu} = 2 \cdot \gamma$.

$$\begin{aligned}
\frac{F_{Err}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}} &= \frac{F'}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma_{neu}^2\omega_E^2}} \\
\frac{F_{Err}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}} &= \frac{F'}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 16\gamma^2\omega_E^2}} \\
\Rightarrow F' &= \frac{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 16\gamma^2\omega_E^2}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}} \cdot F_{Err} \\
F' &= 1.04 \cdot F_{Err}
\end{aligned}$$

Somit muss die Kraft 4% größer sein, um die Amplitude konstant zu halten.