I. Theorieteil

T1

Die Bewegung des Projektils ist das Ergebnis der Superposition aus freiem Fall entlang der vertikalen y Richtung und einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit entlang der horizontalen x-Achse. Dieser spezielle Fall ist in Abbildung 1 dargestellt.

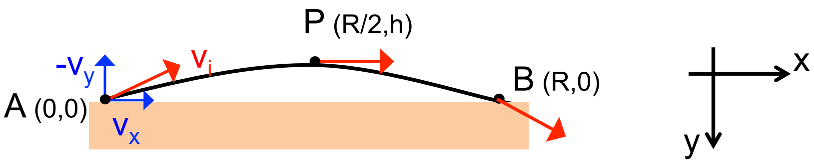

Abbildung 1: Die Projektilbewegung (Aufgabe T1).

Das Projektil wird unter einem Winkel von 30° zur horizontalen mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v_i losgeschossen. Wenn die positive y Richtung nach unten zeigt, sind die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit im Punkt A gleich:

$$\begin{aligned} v_{x,\mathrm{A}} &= v_\mathrm{i}\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_\mathrm{i} \\ v_{y,\mathrm{A}} &= -v_\mathrm{i}\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}v_\mathrm{i} \end{aligned} \tag{1}$$

Sobald das Projektil in der Luft ist, wirkt die Erdbeschleunigung g entlang der y-Achse, während die Bewegung in x Richtung ungestört bleibt. Vom Punkt A zum Punkt P bremst das Geschoss ab. Im Punkt P sind die Beschleunigungskomponenten gleich $a_{y,\mathrm{P}} = g$ und $a_{x,\mathrm{P}} = 0$. Die Geschwindigkeitskomponenten sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} v_{x,\mathrm{P}} &= v_{x,\mathrm{A}} \\ v_{y,\mathrm{P}} &= v_{y,\mathrm{A}} + g t_\mathrm{P} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Aus letzter Gleichung erhalten wir $t_\mathrm{P} = \frac{v_\mathrm{i}}{2g}$. Die Zeit um Punkt B zu erreichen ist $t_\mathrm{B} = 2t_\mathrm{P} = \frac{v_\mathrm{i}}{g}$. Vom Punkt P zum Punkt B ist wieder nur die Erdbeschleunigung g präsent, sodass $a_{y,\mathrm{B}} = g$, $a_{x,\mathrm{B}} = 0$ und

$$\begin{aligned} v_{x,\mathrm{B}} &= v_{x,\mathrm{A}} \\ v_{y,\mathrm{B}} &= v_{y,\mathrm{A}} + g t_\mathrm{B} = \frac{v_\mathrm{i}}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Die maximale Höhe des Projektils ist $h = y_\mathrm{A} + v_{y,\mathrm{A}} t_\mathrm{P} + \frac{1}{2} g t_\mathrm{P}^2$, welche aufgrund unserer Koordinatenwahl negativ ist:

$$h = 0 - \frac{v_\mathrm{i}^2}{4g} + \frac{v_\mathrm{i}^2}{8g} = -\frac{v_\mathrm{i}^2}{8g}$$

Die Reichweite R ist die horizontale Position des Projektils, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit die Zeit t_B bewegt, sodass:

$$R = v_{x,\mathrm{A}} t_\mathrm{B} = \frac{\sqrt{3} v_\mathrm{i}^2}{2g}$$

T2

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad (4)$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \quad (5)$$

Gleichung (4) ist die Darstellung des zweiten Newtonschen Gesetz, welches besagt, dass eine Masse m sich mit einer Beschleunigung $\vec{a}$ bewegt, die proportional zur auf die Masse wirkende Kraft $\vec{F}$ ist. Der Impuls $\vec{p}$ ist gleich $m\vec{v}$, sodass die Ableitung nach der Zeit $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = m\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ ist. Dabei ist die Masse konstant und $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{a}$.

Gleichung (5) ist das zweite Newtonsche Gesetz für Rotation. Drehmoment $\vec{\tau}$ ist definiert als das Kreuzprodukt $\vec{r}\times\vec{F}$. $\vec{r}$ ist die Distanz zwischen der Rotationsachse und dem Punkt, an dem die Kraft $\vec{F}$ wirkt. Wenn tangentiale Komponenten bei einer gebogenen Trajektorie betrachtet werden, erhält man $\vec{F} = m\vec{a} = mr\vec{\alpha}$ mit α der Winkelbeschleunigung. Aus dieser Beobachtung, $\tau = mr^2\alpha = I\alpha$, erhalten wir die Definition für das Trägheitsmoment $I = mr^2$. Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses $\vec{L}$ ist gleich dem Drehmoment, da $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = rm\vec{v} = r^2m\vec{\omega} = I\vec{\omega}$, wobei I konstant und $\mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t = \vec{\alpha}$ ist. (Beachten Sie, dass $\vec{v} = r\vec{\omega}$ nur für tangentiale Komponenten gilt).

T3

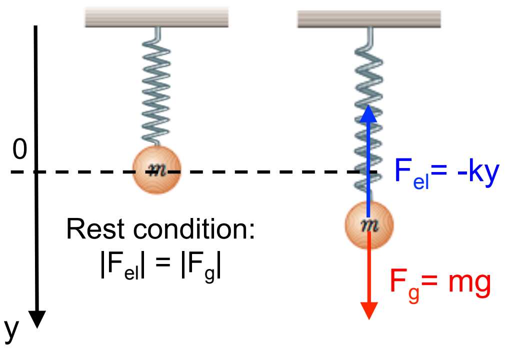

Abbildung 2: Kraftdiagramm für ausgedehnte Feder (Aufgabe T3).

Verschiedene Formen der Energie liegen vor: Die elastische Energie der Feder, die durch die wiederherstellende elastische Kraft $\vec{F}_{el}$ der Feder auftritt, die kinetische und potentielle Energie in Zusammenhang mit der vertikalen Bewegung des Balls der Masse m. Abhängig von der Lage des Nullpunkts der potentiellen Energie (um es uns einfach zu machen, nehmen wir die Gleichgewichtslage der Feder) und gemäß der Koordinatenwahl, erreicht der Ball, wenn er nach unten gezogen wird sein Maximum in potentieller Energie. Nachdem er losgelassen wird, verringert sich die potentielle Energie und wird in kinetische Energie (Bewegung nach oben) umgewandelt.

T4

Bei einem elastischen Stoß sind Impuls (Gl. 6) und kinetische Energie (Gl. 7) erhalten.

$$m_1 v_{1\mathrm{i}} + m_2 v_{2\mathrm{i}} = m_1 v_{1\mathrm{f}} + m_2 v_{2\mathrm{f}} \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\mathrm{i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\mathrm{f}}^2 \tag{7}$$

Wenn man ein Geräusch bei dem Stoß hört, weiß man, dass die kinetische Energie nicht erhalten ist und es sich somit um ein inelastischen Stoß handelt. Der Impuls des Systems ist allerdings immer noch erhalten. Der Impuls eines einzelnen Objekts kann sich natürlich trotzdem ändern und man kann die Impulsänderung folgendermaßen berechnen: $\vec{I}_1 = \Delta \vec{p}_1 = m_1(v_{1\mathrm{f}} - v_{1\mathrm{i}})$.

T5

Das Stück mit dem Griff hat weniger Masse als das rechte Stück. Um zu sehen warum, betrachten Sie den Schwerpunkt bei dem Schnitt und die zwei Schwerpunkte der einzelnen Stücke nach dem Schnitt. Die Masse des Griffteils befindet sich in einem Größeren Abstand zu dem Schnitt als die des anderen Teils. Da das Produkt von Masse und Distanz auf beiden Seiten gleich ist, muss der Griff leichter sein.

T6

Mit einer längeren Länge L, vergrößert sich die Periodendauer T des Pendels nach $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, somit benötigt jede Schwingung länger und daher wird auch jede Sekunde der Uhr länger als eine wahre Sekunde: Die Uhr läuft also langsamer. Für ein einfaches Pendel, das kleine Auslenkungen ($\theta < 10°$) hat, ist die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

dabei ist die Winkelfrequenz ω gleich $\sqrt{g/L}$ und die Schwingungsdauer ist $T = 2\pi/\omega$. Lösung dieser Differentialgleichung ist eine periodische Oszillation mit der Zeit:

$$\theta(t) = \theta(0)\cos(\omega t + \phi)$$

Im Gegensatz dazu beschreibt eine Welle eine Oszillation in der Zeit und im Ort. Das Argument der periodischen Funktion ist (x ± vt):

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

wobei die Wellenzahl k, definiert ist als $2\pi/\lambda$. ω ist die Winkelfrequenz und ϕ die Phasenkonstante.

II. Rechenteil

R1

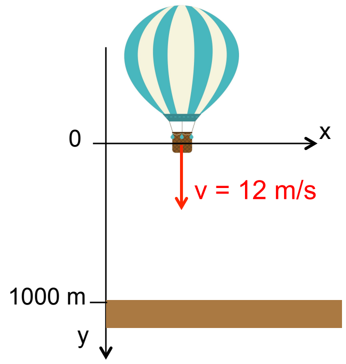

Abbildung 3: Aufgabe R1.

(a) Ein Stein, der bei $t_\mathrm{i} = 0$ s aus einen Ballon geworfen wird, beschleunigt mit der konstanten Erdbeschleunigung g entlang unserer positiven y-Achse (Abbildung 3). Bei $t_\mathrm{f} = 10$ s ist die Position des Steins:

$$y_\mathrm{f} = y_\mathrm{i} + v_\mathrm{i}t + \frac{1}{2}gt^2 = 12\,\mathrm{m/s}10\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}9.8\,\mathrm{m/s}^2 100\,\mathrm{s}^2 = 610\,\mathrm{m}$$

Das heißt 1000-610 = 390 m vom Boden. Die Geschwindigkeit an diesem Punkt wird so berechnet:

$$v_\mathrm{f} = v_\mathrm{i} + gt = 12\,\mathrm{m/s} + 9.8\,\mathrm{m/s}^2 10\,\mathrm{s} = 110\,\mathrm{m/s}$$

Die Zeit, die der Stein benötigt um den Boden zu erreichen erhält man aus folgender quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gt^2 + v_\mathrm{i}t + \Delta y &= 0 \\ t &= 13.1\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

(b) Es müssen die gleichen Gleichungen verwendet werden, wobei jetzt nach Abbildung 3 die Anfangsgeschwindigkeit $v_\mathrm{i} = -12$ m/s ist. Bei $t_\mathrm{f} = 10$ s, ist der Stein noch 630 m vom Boden entfernt und hat eine Geschwindigkeit von of 86 m/s. Den Boden erreicht er nach 15.56 s.

R2

Nach Abbildung 4, ist die x Komponente nach oben positiv, sodass die Gewichtskomponenten folgende sind:

$$\begin{aligned} P_\mathrm{x} &= -mg\sin\alpha \\ P_\mathrm{y} &= -mg\cos\alpha \end{aligned}$$

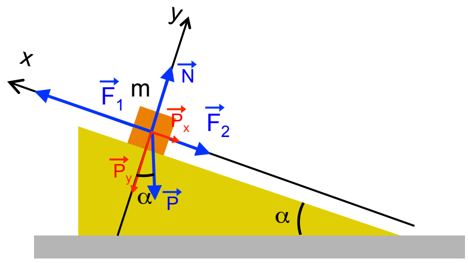

Abbildung 4: Exercise R2.

Die Steigung übt auch eine Kraft $\vec{N}$ auf den Block aus um die y-Komponente des Gewichts auszugleichen $\vec{N} = -\vec{P}_\mathrm{y}$. Die Gleitreibung ist immer entgegengesetzt der Bewegungsrichtung und ist $\vec{F}_k = -\mu_k \vec{N}$. Nun untersuchen wir die Bewegung nach oben und unten separat:

$$\begin{aligned} F_1 - mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha &= 0 \\ F_2 + mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Ersetzen Sie $F_1 = 6F_2$ und lösen Sie das Gleichungssystem für eine der beiden Kräfte und μ_k. Durch lösen erhält man:

$$\mu_k = \frac{7}{5}\tan\alpha = 0.375$$

R3

Wenden Sie Impulserhaltung für die geschossene Kugel (Objekt 1) und den Pendelblock (Objekt 2) an, um die Endgeschwindigkeit des Pendels zu erhalten v_2f:

$$\begin{aligned} m_1 v_\mathrm{1i} &= m_1 v_\mathrm{1f} + m_2 v_\mathrm{2f} \\ v_\mathrm{2f} &= \frac{m_1(v_\mathrm{1i} - v_\mathrm{1f})}{m_2} = \frac{4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot(500\,\mathrm{m/s})}{1\,\mathrm{kg}} = 2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Nun teilen wir den Moment, in dem der Stoß stattfindet von dem, in dem das Pendel anfängt zu schwingen. Wenden Sie für den Stoß die Energieerhaltung an (Gl. 8): Die kinetische Energie der Kugel wird in kinetische und interne Energie ΔE_i des Blocks umgewandelt (keine Änderung in der Richtung der Kugel bedeutet keine weiter Änderung in ihrer kinetischen Energie). Die Veränderung der internen Energie des Block ist proportional zur konstanten Kraft F, die die Kugel abbremst und zur Dicke des Blocks d, sodass :$\Delta E_i = Fd$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1 v_\mathrm{1i}^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_\mathrm{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_\mathrm{2f}^2 + Fd \qquad (8) \\ F &= \frac{1}{2d}\left(m_1(v_\mathrm{1i}^2 - v_\mathrm{1f}^2) - m_2 v_\mathrm{2f}^2\right) \\ F &= 2.8\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

Betrachten Sie nun den zweiten Teil des Problems: Nach dem Stoß gewinnt der Block an kinetischer Energie und da er an einem Faden gehalten wird, steigt er um die Höhe h. Bei der maximalen Höhe ist alle kinetische Energie in potentielle Energie übergegangen und h ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{f}}^2 &= m_2gh \\ h &= 0.2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

R4

Die Gleichung, welche die harmonische Oszillation beschreibt ist:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = 7.4\cos(4.16t - 2.42) \tag{9}$$

(a) Die für eine Schwingung benötigte Zeit ist die Periodendauer T der Oszillation, die definiert ist als $T = 2\pi/\omega$ und somit gleich $T = 2\pi/4.16 = 1.51$ s ist.

(b) Die maximale potentielle elastische Energie U_{max} kann durch die Federkonstante k der Feder und der Amplitude $A = 7.4$ cm der Oszillation berechnet werden: $U_{\mathrm{max}} = 1/2kA^2$. Die Federkonstante erhält man aus der Definition der Winkelfrequenz.

$$\begin{aligned} k &= \omega^2 m = (4.16\,\mathrm{rad/s})^2 \cdot 2.10\,\mathrm{kg} = 36.34\,\mathrm{kg/s^2} \\ U_{\mathrm{max}} &= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 36.34\,\mathrm{kg/s^2}\cdot(0.074\,\mathrm{m})^2 = 0.0995\,\mathrm{J} \sim 0.1\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

(c) Nach Newtons zweitem Gesetz wirkt die größte Kraft auf das Objekt, wenn es am stärksten beschleunigt. Die Beschleunigung des Objekts kann durch zweifaches ableiten von Gleichung (9) erhalten werden:

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) \\ a(t) &= x''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) \\ a_{\mathrm{max}} &= A\omega^2 = 0.074\,\mathrm{m}\cdot(4.16\,\mathrm{rad/s})^2 = 1.28\,\mathrm{m/s^2} \\ F_{\mathrm{max}} &= ma_{\mathrm{max}} = 2.10\,\mathrm{kg}\cdot 1.28\,\mathrm{m/s^2} = 2.7\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

(d) Wie schon in Teil (c) gesehen, ist $v(t)$ bei $t = 1$ s gleich $-(0.074\,\mathrm{m}{\cdot}4.16\,\mathrm{rad/s})\sin(4.16\,\mathrm{rad/s}\cdot 1\,\mathrm{s} - 2.42\,\mathrm{rad}) =$ $0.303\,\mathrm{m/s}$.

R5

Die Arbeit, die durch das Ziehen des Fadens um eine Distanz $s=$ 80 cm mit der konstanten Kraft F erzeugt wird, ist gleich:

$$W = Fs = 5.57\,\mathrm{N}0.8\,\mathrm{m} = 4.456\,\mathrm{J}$$

Diese Arbeit wird in kinetische Energie umgewandelt: $W = \Delta K = 1/2I\omega_{\mathrm{f}}^2$. Die Endwinkelgeschwindigkeit des Kreisels ist also

$$\omega_{\mathrm{f}} = \sqrt{\frac{2W}{I}} = 149\,\mathrm{rad/s}$$

R6

Da das Schwungrad eine massive Scheibe ist, ist sein Trägheitsmoment $I = 1/2mR^2 = 15.625$ kgm^2, mit der Masse $m = 80.0$ kg und Radius $R = 0.625$ m. Da die Winkelbeschleunigung α $= 1.67$ rad/s^2 des Schwungrads bekannt ist, kann man das gesamte Drehmoment ausrechnen:

$$\tau = I\alpha = 26.09\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2$$

Aus der Definition des Drehmoments, $\tau = r \times F$, kann die Summe aller Kräfte auf das Schwungrad und das kleinere Rad berechnet werden (beachten Sie, das die Bewegung des kleinen Rades gleich dem des Schwungrads ist und die Kräfte immer senkrecht auf dem Radiusvektor stehen):

$$F_{\mathrm{tot}} = \frac{\tau}{r} = 113.45\,\mathrm{N}$$

dabei ist $r = 0.23$ m der Radius des kleinen Rades. Spannung in beiden Teilen des Riemens sind entgegengesetzt. Ist also $F_{\mathrm{tot}} = T_1 + T_2$ und $T_1 = 135$ N, ist die entgegengesetzte Spannung T_2:

$$T_2 = T_1 - F_{\mathrm{tot}} = (135 - 1113.45)\,\mathrm{N} = 21.55\,\mathrm{N}$$

R7

Die Gleichung für ein gedämpftes Pendel ist:

$$\theta(t) = \theta(0)\exp^{-bt/(2m)}\cos(\omega t + \phi)$$

es verändert sich also die Amplitude mit der Zeit nach $A(t) = \theta(0)\exp^{-bt/(2m)}$. Da bei $t = 10$s $A(t) = 1°$ ist, kann der Dämpfungsfaktor $\frac{b}{2m}$ ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= 15° \\
\exp^{(-10b)/(2m)} &= \frac{1}{15} \\
\frac{b}{2m} &= -\frac{1}{10}\ln\frac{1}{15} = 0.27\,\mathrm{rad/s}
\end{aligned}$$

Die Eigenfrequenz ω_0 (ohne Dämpfung) wird einfach über die Länge L des Pendels berechnet:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 1.8\,\mathrm{rad/s}$$

Da $\frac{b}{2m} \ll \omega_0$, handelt es sich hierbei um eine Schwingung (siehe Abbildung 5).

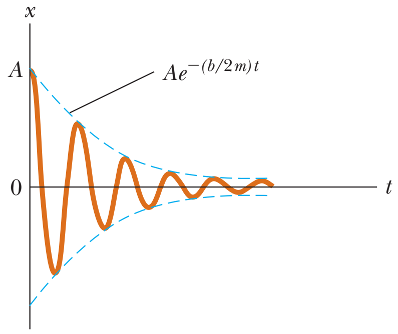

Abbildung 5: Schwingfall (Aufgabe R7).

R8

Die zweite harmonische auf einem, an beiden Enden festen, straffen Faden wird für $n = 2$ in der Gleichung realisiert:

$$\begin{aligned} n\frac{\lambda}{2} &= L \\ \lambda &= L \end{aligned}$$

Die zweite harmonische hat 3 Knoten (Amplitude A = 0) und zwei Berge (A max). Die Wellengeschwindigkeit ist gegeben durch $v = \lambda f = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Mit der Frequenz f, der Spannung T im Faden und der Längendichte μ, kann die Länge des Fadens leicht berechnet werden:

$$L = \frac{1}{250\,\mathrm{Hz}}\sqrt{\frac{250\,\mathrm{N}}{10^{-3}\,\mathrm{kg/m}}} = 2\,\mathrm{m}$$

Legt man eine Finger in die Mitte des Fadens, verdoppelt sich die Frequenz unter gleicher Spannung.