

Experimentelle Übungen zur Physik für Chemie-Studierende

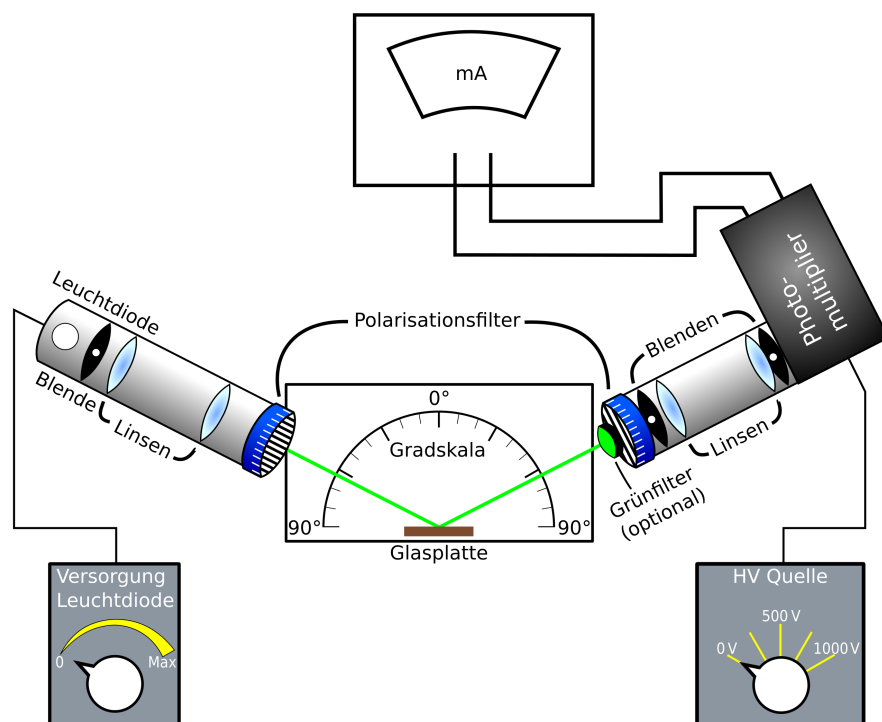
Sommersemester 2019



Department für Physik
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Universität Siegen

Experimentelle Übungen zur Physik für Chemie-Studierende

Sommersemester 2019



Department für Physik
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät
Universität Siegen

Inhaltsverzeichnis

1	Literatur und Sicherheitsfibel	4
1.1	Literatur	4
1.2	Sicherheitsfibel	5
1.2.1	Verhalten bei Notfällen	5
2	Einführung in die Fehlerrechnung	6
2.1	Statistische und systematische Fehler	7
2.2	Mathematische Grundlagen zur Fehlerrechnung	8
2.2.1	Mittelwert und Standardabweichung	8
2.2.2	Das gewichtete Mittel	10
2.2.3	Fehlerfortpflanzung	11
2.2.4	Lineare Regression	12
2.2.5	Gewichtete lineare Regression	16
2.2.6	Anpassung von beliebigen Graphen	16
2.3	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	17
2.3.1	Grundlegende Begriffe	17
2.3.2	Zusammenhang mit physikalischen Messprozessen	22
2.3.3	Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	24
3	Die Wheatstone-Brücke	29
3.1	Einführung	29
3.2	Physikalische Grundlagen	29
3.2.1	Spezifischer Widerstand	30
3.2.2	Kirchhoffsche Regeln	30
3.2.3	Wechselstromwiderstände	31
3.2.4	Zeigerdiagramme	31
3.2.5	Typen von Leitern	32
3.3	Versuchsaufbau	34
3.4	Versuchsdurchführung	35
3.4.1	Erster Teil	35
3.4.2	Zweiter Teil	35
3.5	Aufgaben und Auswertung	36
3.5.1	Aufgaben zur Vorbereitung	36
3.5.2	Auswertung	36
4	Millikan-Versuch	37
4.1	Einführung	37
4.2	Physikalische Grundlagen	37
4.3	Versuchsbeschreibung	39
4.4	Versuchsdurchführung	39
4.5	Auswertung	39

5	Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons	41
5.1	Einführung	41
5.2	Physikalische Grundlagen	41
5.2.1	Bewegte Ladungen im Magnetfeld	41
5.2.2	Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes durch ein Helmholtzspulenpaar	42
5.3	Versuchsaufbau	43
5.4	Versuchsdurchführung	44
5.4.1	Messung der Magnetfeldstärke	44
5.4.2	Bestimmung des Kreisbahnradius	44
5.5	Auswertung	45
5.5.1	Aufgaben zur Vorbereitung	45
5.5.2	Bestimmung der Magnetfeldstärke	46
5.5.3	Berechnung der spezifischen Ladung	46
6	Polarisation	47
6.1	Einführung	47
6.2	Physikalische Grundlagen	47
6.2.1	Elektromagnetische Wellen	47
6.2.2	Arten von Polarisation	48
6.2.3	Erzeugung von polarisiertem Licht	49
6.2.4	Photomultiplier	51
6.3	Versuchsaufbau	52
6.4	Versuchsdurchführung	53
6.4.1	Versuchsvorbereitung	53
6.4.2	Messaufgabe 1: Linear polarisiertes Licht	54
6.4.3	Messaufgabe 2: Elliptisch polarisiertes Licht	54
6.4.4	Messaufgabe 3: Messung der Reflexion an der Glasplatte	55
6.5	Aufgaben zur Auswertung	56
6.5.1	Linear polarisiertes Licht	56
6.5.2	Elliptisch polarisiertes Licht	56
6.5.3	Messung der Reflexion an der Glasplatte	57
6.6	Kontrollfragen zur Vorbereitung	57

1 Literatur und Sicherheitsfibel

1.1 Literatur

Nachfolgende Liste enthält als erste Kategorie die Standardwerke der Experimentalphysik. Die zweite Kategorie erweitert den Horizont in theoretischer und/oder praktischer Hinsicht. Dagegen enthält die dritte Kategorie spezifische Bücher zum Thema „Physikalisches Praktikum“, die dem Leser grundlegende Experimentiertechniken vermitteln.

Literaturvorschläge sind immer nur Anhaltspunkte, es gibt nicht *das* Physikbuch. Letztendlich bleibt die Wahl der Literatur auch immer dem persönlichen Geschmack des Lesers vorbehalten.

Bücher zur Experimentalphysik:

Halliday, Resnick	Halliday Physik
Alonso-Finn	Physik
Bergmann-Schäfer	Experimentalphysik (Bd. 1-5)
Gerthsen-Kneser	Physik
Tipler	Physik
Pohl	Einführung in die Physik (Bd. 1-3)
Brandt-Dahmen	Mechanik: Eine Einführung in Experiment und Theorie

Weiterführende Literatur:

D'Ans-Lax	Das „Kochbuch“ des Ingenieurs
Meincke-Grundlach	Das „Kochbuch“ des Elektronik-Ingenieurs
Kohlrausch	Praktische Physik
Joos	Theoretische Physik

Praktikumsbücher:

Walcher	Praktikum der Physik
Westphal	Physikalisches Praktikum
H. Hänsel	Grundzüge der Fehlerrechnung

1.2 Sicherheitsfibel

Arbeitsschutz ist eine entscheidende Aufgabe, die sowohl von Ihnen als auch von den Betreuern stets wahrgenommen werden muss, um hierdurch Arbeitsunfälle zu vermeiden. Vor Beginn jedes Versuches weist Sie Ihr Betreuer auf die jeweiligen sicherheitsrelevanten Aspekte hin. Allgemein gelten für Sie während des gesamten Praktikums die folgenden Bestimmungen:

- Ausschließlich Personen, die sich eingehend vorbereitet haben, dürfen am Versuch teilnehmen.
- Nur diejenigen Tätigkeiten werden ausgeübt, die der Versuchsdurchführung zuzuordnen sind.
- Folgen Sie den Anweisungen Ihres Betreuers.
- Arbeiten Sie konzentriert und geben Sie benachbarten Gruppen die Möglichkeit, ungestört zu arbeiten.
- Gehen Sie stets sorgsam und respektvoll mit der Messapparatur um.
- Bewahren Sie die Ordnung auf den Versuchstischen.
- Es sind keine Modifikationen von Versuchsaufbauten zulässig.
- Melden Sie verdächtige Umstände, z.B. defekte Apparatur, abgebrochene Teile, nicht-intakte elektrische Leitungen und Geräte, unverzüglich Ihrem Betreuer.
- Bei Sicherheitsbedenken oder im Zweifel pausieren Sie den Versuch, bis der Betreuer das Experiment wieder freigibt.
- Verzichten Sie in den Versuchsräumen auf Telefongespräche und das Surfen im Internet.

1.2.1 Verhalten bei Notfällen

- Ersthelfer des Department für Physik benachrichtigen. Die Namen und Kontaktdaten der Ersthelfern hängen in jedem Versuchsraum.
- Bei Feuer, Bedarf an erste Hilfe oder Gefahrstoffaustritt wird umgehend ein Notruf an die zentrale Leitstelle der Universität abgesetzt:
 - von jedem internen Telefonapparat: **2-111**
 - von außerhalb des Uni-Telefonnetzes: **0271-740-2-111**
- Bei Notruf kurz und bündig angeben: Gebäudeteil, Raumnummer, wer anruft und was passiert ist. **WARTEN AUF RÜCKFRAGEN**, das Gespräch wird von der Leitstelle beendet!

2 Einführung in die Fehlerrechnung

In der Physik spielt die Abschätzung und Angabe von Fehlern zu einem Messwert eine entscheidende Rolle. Keine Messung ist frei von Fehlern! Selbst wenn eine Messapparatur absolut unverändert bleibt und sich keinerlei äußere Parameter ändern, schwanken alle Messergebnisse um einen bestimmten Wert, den sog. *Mittelwert*. Daher gilt:

Kein Messergebnis ohne Angabe von Messfehlern!

Hier soll ein kurzer Überblick über die im Anfängerpraktikum nötigen Begriffe und Methoden der Fehlerrechnung und Datenanalyse gegeben werden. Alles in dieser Hinsicht Wichtige für die Auswertung der Versuche wird hier zusammengefasst und motiviert. Daher hat diese Einführung keinen Lehrbuchcharakter, sondern ist als Nachschlagewerk und Hilfe in der Praxis gedacht. Denn Sinn des Praktikums ist nicht zuletzt das Erlernen der Anwendung statistischer Methoden in einem konkreten Experiment, was später im Studium auch theoretisch weiter vertieft werden kann.

Im folgenden Abschnitt 2.1 wird zuerst der Begriff des Fehlers in der Physik erläutert. Daran schließt sich eine Zusammenfassung und kurze Herleitung aller im Praktikum notwendigen Formeln in Abschnitt 2.2 an. Den Abschluss in Abschnitt 2.3 bildet eine Ergänzung zu den grundlegenden Konzepten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Studium zum tieferen Verständnis sehr zu empfehlen ist. Sie ist für das Praktikum aber nicht direkt notwendig und kann daher auch später gelesen werden. Das Thema wird aber insbesondere im weiteren Studienverlauf immer wichtiger werden.

Es gibt natürlich viel weiterführende Literatur zur Datenanalyse. Zusätzlich zu den im vorigen Kapitel erwähnten Büchern sollen hier insbesondere noch folgende genannt werden:

- John R. Taylor, *Fehleranalyse*, VCH, 1. Aufl., 1988 ,
bzw. das englische Original *An introduction to error analysis*, 2. Aufl., 1997
Dieses Buch ist sehr zu empfehlen, da es für das physikalische Grundpraktikum geschrieben wurde und den nötigen Stoff in anschaulicher Weise darstellt.
- Siegmund Brandt, *Datenanalyse*, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Aufl., 1999
Dieses Buch behandelt ausführlich Grundlagen und weiterführende Techniken der Datenanalyse. Besonders die einführenden Kapitel sind hier interessant, da vieles im Buch erst für Fortgeschrittene wichtig wird.

2.1 Statistische und systematische Fehler

Der Wert der Messgröße, die in einem Experiment ermittelt werden soll, wird als *wahrer Wert* bezeichnet. Da es in der Praxis unmöglich ist, eine Messung mit absoluter Genauigkeit durchzuführen, kann man diesen jedoch niemals exakt angeben. Der wahre Wert wäre das Ergebnis einer idealisierten Versuchsdurchführung. Bei einem Experiment besteht daher immer die Aufgabe (1.) ein Ergebnis anzugeben, das dem wahren Wert möglichst nahe kommt, und (2.) dessen geschätzte Abweichung vom wahren Wert anzugeben.

Man unterscheidet bei einem Messvorgang grundsätzlich zwei Arten von Fehlerquellen: statistische und systematische Fehler. Diese unterscheiden sich darin, dass sich statistische Fehler bei einer größer werdenden Anzahl von Messwerten mehr und mehr herausmitteln (und man sich so dem wahren Wert immer mehr annähern kann), systematische dagegen nicht.

Statistische Fehler

Statistische Fehler sind solche, die bei unveränderter Apparatur zu verschiedenen Ergebnissen führen, wenn die Messung wiederholt wird. Die Abweichungen der Messergebnisse voneinander werden durch zufällige Prozesse verursacht.

Da eine Messapparatur in der Regel ein komplexes, makroskopisches System ist, können viele Einflüsse nicht berücksichtigt werden. Betrachten wir als Beispiel die Messung der Schwingungsdauer eines Fadenpendels mit einer Stoppuhr. Führt man diese Messung mehrmals durch, so ist es praktisch unmöglich, zweimal exakt den gleichen Versuch zu machen: Die Masse wird mit leicht anderer Anfangsgeschwindigkeit losgelassen, die Luftströmung ist etwas anders, die Aufhängung bewegt sich etc. Das Stoppen und Ablesen der Anzeige kann ebenfalls nur mit begrenzter Genauigkeit durchgeführt werden und ist zufälligen Schwankungen unterlegen.

Diese Schwankungen werden jedoch alle um einen zentralen Wert, den *Mittelwert*, herum auftreten. Ihr Ausmaß wird durch den statistischen *Fehler* beschrieben. Es kann auch sein, dass ein Messprozess von Natur aus ein zufälliges Ergebnis liefert. Dies passiert z. B. dort, wo die Quantenmechanik eine Rolle spielt, etwa beim radioaktiven Zerfall von Kernen. Eine Messung, wie viele Teilchen der kosmischen Strahlung pro Sekunde auf eine bestimmte Fläche treffen, wird ebenfalls immer unterschiedliche Werte ergeben. Man misst dann die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* für diese Ereignisse. Je mehr Messungen man macht, desto genauer kann man diese auch experimentell ermitteln.

Statistische Fehler lassen sich immer aus der Messreihe selbst ermitteln. Die wichtigste Aufgabe der Praktikanten ist es, diese Fehler richtig zu bestimmen.

Systematische Fehler

Systematische Fehler sind solche, die sich bei wiederholter Messung nicht herausmitteln, sondern durch die *jeder Messwert* in eine bestimmte Richtung abweicht. Sie sind ein fester Bestandteil des Messergebnisses und haben grundsätzlich ihre Ursache in der Anlage der Apparatur, da es in der Praxis ebenfalls unmöglich ist, ein perfektes Messgerät zu konstruieren. Systematische Fehler können nicht allein aus der Messreihe bestimmt werden, sondern es

müssen zusätzliche Überlegungen oder Messungen unter anderen Randbedingungen mit dem Versuchsaufbau durchgeführt werden.

Beim Beispiel mit dem Fadenpendel wäre eine Quelle systematischer Fehler z. B. die Eichung der Stoppuhr, mit der man misst. Sie kann die Zeit sicher nicht mit absoluter Genauigkeit messen und mag z. B. etwas „zu schnell laufen“. In diesem konkreten Fall (bei der Messung von einigen Sekunden mit einer Stoppuhr) ist die Genauigkeit zwar so gut, dass man den systematischen Fehler vernachlässigen kann, bei komplizierteren Experimenten kann das aber anders sein. Zum Beispiel ein Detektor, der zwei verschiedene Teilchenarten unterscheiden soll, kann durchaus eine Wahrscheinlichkeit im Prozentbereich haben, das falsche Ergebnis zu liefern, was bei der Auswertung zu berücksichtigen ist.

Der systematische Fehler wird stets getrennt vom statistischen Fehler angegeben. Die Einschätzungen zu den systematischen Fehlern werden im Praktikum in der Diskussion des Messergebnisses vorgestellt und können hier normalerweise qualitativ angegeben werden. (In der Forschung ist die quantitative Abschätzung systematischer Fehler jedoch ein wichtiger und oft umfangreicher Teil des Ergebnisses.)

2.2 Mathematische Grundlagen zur Fehlerrechnung

Im Folgenden werden die für die Versuchsauswertungen wichtigen Begriffe und Formeln angegeben und erläutert.

2.2.1 Mittelwert und Standardabweichung

Nach mehrmaliger Durchführung der Messung einer physikalischen Größe x haben wir N Messwerte x_i (mit $i = 1 \dots, N$) erhalten. Wir wollen nun eine Abschätzung für den wahren Wert erhalten, der mit \hat{x} bezeichnet werden soll. Jeder Messwert hat eine (zunächst unbekannte) Abweichung von diesem, die mit ϵ_i bezeichnet wird:

$$x_i = \hat{x} + \epsilon_i \quad (2.2.1)$$

Die in der Datenanalyse am besten bewährte Methode zur Abschätzung des wahren Wertes ist das *Prinzip der kleinsten Quadrate*, das am Anfang des 19. Jahrhunderts von GAUSS und LEGENDRE entwickelt wurde. Es besagt, dass der Wert \bar{x} den besten Schätzwert für den wahren Wert liefert, für den die Summe der quadratischen Abweichungen zu den Messwerten x_i minimal ist:

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \stackrel{!}{=} \min. \quad (2.2.2)$$

Man sucht also im Wesentlichen den Wert, der zusammengenommen möglichst nahe bei allen Messwerten liegt. Die Verwendung der quadratischen Abweichung sorgt dafür, dass größere Abweichungen mit mehr Gewicht in diese Summe eingehen und somit eher vermieden werden müssen als kleinere.

Das Prinzip der kleinsten Quadrate ergibt in unserem Fall:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{x}} \left(\sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 \right) &= \frac{d}{d\bar{x}} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow (-2) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) &= 0 \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) &= \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - N\bar{x} = 0 \\
\Rightarrow \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Das **arithmetische Mittel** ist also die beste Schätzung des wahren Wertes \hat{x} :

$$\boxed{\bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i} \tag{2.2.4}$$

Dieser wird allgemein als **Mittelwert** bezeichnet.

Als Maß für den Fehler des Mittelwerts verwendet man die **Varianz der Messung**:

$$\boxed{V(x) := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \tag{2.2.5}$$

Dies ist im Wesentlichen der Mittelwert der quadratischen Abweichung von \bar{x} . Der Faktor $N-1$ im Nenner (statt N wie man naiv bei einer Mittelung von N Werten erwarten würde) hat tiefere theoretische Gründe und soll hier nicht hergeleitet werden. Man kann sich aber deutlich machen, dass auf diese Weise für $N=1$ die Varianz unendlich ist, was auch Sinn macht, da man aus einem einzigen Messwert keine statistische Aussage erhalten kann.

Die Wurzel aus der Varianz wird als **Fehler der Einzelmessung** bezeichnet:

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \tag{2.2.6}$$

Uns interessiert jedoch bei der Messung einer physikalischen Größe nicht die erwartete Abweichung einer Einzelmessung vom Mittelwert, sondern die Abweichung $\Delta\bar{x}$ des Mittelwertes vom wahren Wert. Diese ist gegeben durch (Herleitung in Abschnitt 2.3.2):

$$\Delta\bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}} \tag{2.2.7}$$

Somit erhält man als endgültige Formel für den **Fehler des Mittelwertes**:

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.2.8)$$

Messergebnisse sind also in der folgenden Form anzugeben:

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} \quad (2.2.9)$$

Hinweis: Die numerische Größe der Messwerte mit einer größeren Genauigkeit als der des Fehlers anzugeben, macht keinen Sinn. Üblicherweise werden daher die Ergebnisse gerundet. Hat man also für eine bestimmte Größe z. B. $\bar{x} = 1,3024$ und $\Delta\bar{x} = 0,083$ aus der Messreihe bestimmt, so würde man den Fehler auf $\Delta\bar{x} = 0,08$ runden.

Üblicherweise werden Mittelwert und Fehler auch auf die gleiche Nachkommastelle angegeben. Man rundet in diesem Fall dann also \bar{x} auf die zweite Nachkommastelle $\bar{x} = 1,30$ (auch wenn diese 0 ist). Das Ergebnis hier wäre also $x = 1,30 \pm 0,08$.

2.2.2 Das gewichtete Mittel

Bei der Bildung des arithmetischen Mittels wird davon ausgegangen, dass jeder Messwert gleichberechtigt in die Messung eingeht. Diese Art der Mittelwertbildung wird ungenau, sobald die einzelnen Messwerte nicht mehr den gleichen Einfluss auf das Endergebnis haben.

Als Beispiel betrachten wir noch einmal die Bestimmung der Schwingungsdauer eines Fadenpendels. Hierzu seien drei Messreihen durchgeführt worden: Die erste besteht aus 20, die zweite aus 50 und die dritte aus 30 Einzelmessungen. Aus diesen drei Messreihen soll nun das Endergebnis bestimmt werden. Offensichtlich muss die erste Messreihe zu 20%, die zweite zu 50% und die dritte zu 30% in den endgültigen Mittelwert einfließen.

Zu diesem Zweck bedient man sich des *gewichteten Mittels*. Es ist folgendermaßen definiert:

$$\bar{x}_{\text{gew.}} := \frac{\sum_{i=1}^N w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (2.2.10)$$

Die w_i sind hierbei die sogenannten *Gewichte*. Sie sind ein Maß für den Einfluss der x_i auf den gewichteten Mittelwert $\bar{x}_{\text{gew.}}$. In unserem Beispiel wären also $w_1 = 0,2$; $w_2 = 0,5$ und $w_3 = 0,3$.

Man kann die Gewichte für N unterschiedliche Messreihen auch daraus bestimmen, welches Vertrauen man ihnen schenkt. Das Maß hierfür ist die inverse Varianz der Mittelwerte der einzelnen Messreihen:

$$w_i = \frac{1}{V(x_i)} = \frac{1}{(\Delta x_i)^2} \quad (2.2.11)$$

Die inverse Varianz des gewichteten Mittels ist Summe der Gewichte:

$$\frac{1}{(\Delta \bar{x}_{gew.})^2} = \sum_{i=1}^N w_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\Delta x_i)^2} \quad (2.2.12)$$

2.2.3 Fehlerfortpflanzung

Oft sind zur Bestimmung einer physikalischen Größe mehrere Einzelgrößen zu messen, die alle mit einem individuellen Fehler behaftet sind. So müssen etwa zur Bestimmung einer Geschwindigkeit v die verstrichene Zeit t zum Durchlaufen einer Strecke s gemessen werden; die Messung von t und s ist dabei mit Fehlern behaftet. Der Gesamtfehler von $v = v(s, t) = s/t$ ist durch *Fehlerfortpflanzung* zu bestimmen.

Sei $y = y(x_i)$ die zu bestimmende physikalische Größe, die von direkt gemessenen Größen $x_i = x_1, \dots, x_N$ abhängt. Dann ergibt sich der Fehler Δy von y durch das **Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz**

$$\boxed{(\Delta y)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2} \quad (2.2.13)$$

Betrachten wir als Beispiel eine Funktion $f(x, y) = x^2 - 2y$, die von den beiden gemessenen Größen x und y mit Fehlern Δx und Δy abhängt. Dann ist der Fehler Δf :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2 (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(2x)^2 (\Delta x)^2 + (-2)^2 (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{4x^2 (\Delta x)^2 + 4 (\Delta y)^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Ist der Zusammenhang zwischen den Messgrößen x_i rein multiplikativ, so ist es wesentlich einfacher, mit relativen Fehlern $\Delta y_{rel} = \frac{\Delta y}{y}$ zu rechnen. Dies wollen wir uns an Hand eines weiteren Beispiels verdeutlichen:

Sei $z(x, y) = x \cdot y^2$ eine Größe, die aus x und y zu bestimmen ist. Aus (2.2.13) ergibt sich:

$$(\Delta z)^2 = y^4(\Delta x)^2 + (2xy)^2(\Delta y)^2 \quad (2.2.15)$$

Teilt man die Gleichung durch $z^2 = (x \cdot y^2)^2$, so erhält man für den relativen Fehler:

$$(\Delta z)_{\text{relativ}}^2 = \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta y}{y}\right)^2 \quad (2.2.16)$$

Ein Fehler von 1% in x bewirkt also einen 1%-igen Fehler in z während ein Fehler von 1% in y einen 2%-igen Fehler in z zur Folge hat. Offenbar gilt folgende Merkregel:

Geht eine Messgröße x in der n -ten Potenz in die zu bestimmende Größe z ein, so geht der Fehler von x n -fach in den Fehler von z ein:

$$\boxed{z = z(x^n) \Rightarrow \Delta z_{\text{relativ}} = n \cdot \Delta x_{\text{relativ}}} \quad (2.2.17)$$

Hinweis: Die Fehlerfortpflanzung darf in der obigen Form nur angewendet werden, wenn die eingehenden Größen *unabhängig* sind, also keine Korrelation haben (siehe Abschnitt 2.3). Dies ist in diesem Praktikum auch normalerweise der Fall.

Allgemein geht aber die Korrelation mit in die Fehlerfortpflanzung ein, was hier nicht unerwähnt bleiben darf.

2.2.4 Lineare Regression

Oft ist man interessiert an der Abhängigkeit einer Messgröße von einem Parameter des Experiments. Man stelle sich etwa folgende Situation vor: Ein elektrischer Widerstand R soll mit Hilfe der Spannung U und dem Strom I bestimmt werden. Dazu verwendet man eine regelbare Spannungsquelle und ein Amperemeter (Strommessgerät), man misst also I für verschiedene Spannungen U . Zwischen ihnen besteht als Zusammenhang das bekannte Ohmsche Gesetz: $U = R \cdot I$ bzw. $I = \frac{1}{R} \cdot U$. Trägt man I in Abhängigkeit von U grafisch auf, so scheinen alle Messpunkte mehr oder weniger auf einer Geraden mit der Steigung $1/R$ zu liegen.

Wir haben bereits in 2.2.1 gesehen, dass die Forderung nach der Minimierung der Summe aller Fehlerquadrate $\sum \epsilon_i^2$ zum arithmetischen Mittel als beste Schätzung des wahren Werts führt. Dieses Verfahren lässt sich auch hier anwenden, um die Gerade mit der Steigung zu finden, die die Datenpunkte am besten beschreibt, und so R zu ermitteln. Es wird als *Lineare Regression* bezeichnet.

Betrachten wir allgemein die Messung von N Datenpunkten y_i in Abhängigkeit verschiedener Werte einer Größe x_i . Wir denken uns eine lineare Vorschrift $y = m \cdot x + b = y(x, m, b)$ gegeben. m ist die Steigung und b der y -Achsenabschnitt. Trägt man die tatsächlichen Messwerte auf, so werden diese in einem gewissen Abstand zur durch diese beiden Parameter beschriebenen Geraden liegen. Als Beispiel für die nun beschriebene Anpassung einer Geraden an die Werte ist in Abb. 2.2.1 eine graphische Darstellung gezeigt.

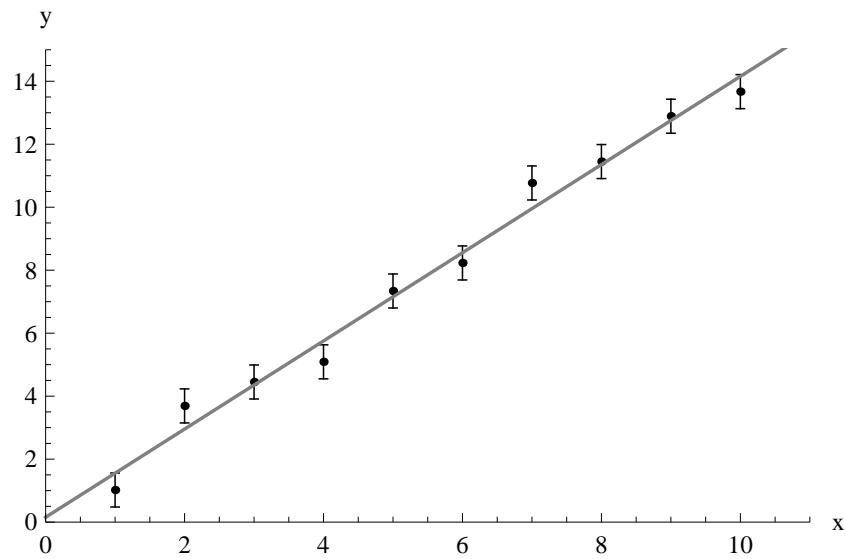


Abbildung 2.2.1: Messung von 10 Messwerten y_i in Abhängigkeit von $x_i = 1, \dots, 10$ und die erhaltene Ausgleichsgerade.

Man betrachtet als Maß für den Fehler wieder die Summe der quadratischen Abstände:

$$\sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i, m, b))^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b))^2 \quad (2.2.18)$$

Die Forderung, dass die Summe der Fehlerquadrate $\sum \epsilon_i^2$ minimal werden soll, führt zu:

$$\frac{\partial}{\partial m} \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b))^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.2.19)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b))^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.2.20)$$

Aus (2.2.19) erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial m} \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b))^2 = 0 \\ \Rightarrow & 2 \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b))(-x_i) = 0 \\ \Rightarrow & - \sum_{i=1}^N x_i y_i + m \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i = 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Aus (2.2.20) erhält man analog:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b))^2 = 0 \\ \Rightarrow & 2 \sum_{i=1}^N (y_i - (m \cdot x_i + b)) = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^N y_i - m \sum_{i=1}^N x_i - N \cdot b = 0 \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Damit werden die beiden Bedingungen zu:

$$- \sum_i x_i y_i + m \sum_i x_i^2 + b \sum_i x_i = 0 \quad (2.2.23)$$

$$\sum_i y_i - m \sum_i x_i - N \cdot b = 0 \quad (2.2.24)$$

Wir lösen zunächst (2.2.24) nach m auf:

$$m = \frac{\sum_i y_i - N \cdot b}{\sum_i x_i} \quad (2.2.25)$$

und setzen in (2.2.23) ein:

$$\begin{aligned}
 & -\sum_i x_i y_i + \frac{\sum_i y_i - N \cdot b}{\sum_i x_i} \sum_i x_i^2 + b \sum_i x_i = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{\sum_i x_i} \left[-\sum_i x_i y_i \sum_i x_i + \left(\sum_i y_i - N \cdot b \right) \sum_i x_i^2 + b \left(\sum_i x_i \right)^2 \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & -\sum_i x_i y_i \sum_i x_i + \sum_i y_i \sum_i x_i^2 - N b \sum_i x_i^2 + b \left(\sum_i x_i \right)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & -\sum_i x_i y_i \sum_i x_i + \sum_i y_i \sum_i x_i^2 - b \left[N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2 \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \boxed{b = \frac{\sum_i y_i \sum_i x_i^2 - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}} \quad (2.2.26)
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die obige Formel für m erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\boxed{m = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}} \quad (2.2.27)$$

Fehler der linearen Regression

Auch eine Regressionsgerade ist lediglich eine Schätzung der wahren Gerade; damit sind die Parameter m und b mit Fehlern behaftet. Wie in (2.2.6) ergibt sich der Fehler eines Datenpunkts Δy zu:

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\sum_i \epsilon_i^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - (m \cdot x_i + b))^2}{N-2}} \quad (2.2.28)$$

Der Faktor $N - 2$ hat wieder eine kompliziertere Herleitung. Der Wert „2“ im Nenner kommt daher, dass nun zwei Parameter m und b aus der Messreihe ermittelt werden, während es beim Mittelwert nur einer war. Dieser Fehler wird im Diagramm an jedem Messwert als Fehlerbalken aufgetragen, wie in Abb. 2.2.1 gezeigt.

Für die Fehler der Parameter, Δb und Δm , gilt (ohne Herleitung):

$$\Delta b = \sigma \cdot \frac{\sqrt{\sum_i x_i^2}}{\sqrt{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}} \quad (2.2.29)$$

sowie

$$\Delta m = \sigma \cdot \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}} \quad (2.2.30)$$

wobei σ der Fehler eines Datenpunktes, nach (2.2.28), ist.

Hinweis: Bei der linearen Regression sind bisher die x -Werte immer als fehlerlos angenommen worden, was in der Realität natürlich nicht der Fall ist, etwa beim obigen Beispiel mit Strom- und Spannungsmessung. In der Praxis sorgt man in der Regel dafür, dass der Parameter x einen vernachlässigbaren Fehler hat, bzw. nimmt dies der Einfachheit halber an. Die Einbeziehung eines solchen Fehlers würde die statistische Analyse wesentlich komplizierter machen, was in vielen Fällen (wie hier) zu umständlich wäre.

2.2.5 Gewichtete lineare Regression

Aus der Methode der kleinsten Quadrate kann man auch eine gewichtete lineare Regression bestimmen, wobei die Gewichte wieder wie in Abschnitt 2.2.2 durch die inversen Varianzen gegeben sind

$$w_i = \frac{1}{V(y_i)} = \frac{1}{(\Delta y_i)^2} \quad (2.2.31)$$

Die Formeln, die so für die Parameter b und m erhält, erhält man leicht aus denen im vorigen Abschnitt, indem man:

- alle Summen zu gewichteten Summen macht, also $\sum_i x_i \rightarrow \sum_i w_i x_i$ etc.
- die Ersetzung $N \rightarrow \sum_i w_i$ durchführt, und
- bei den Fehlern Δm und Δb den Messfehler Δy weglässt (der Fehler der y -Werte wird nun durch die Gewichte in den Summen berücksichtigt).

2.2.6 Anpassung von beliebigen Graphen

Die Methode der kleinsten Quadrate kann natürlich nicht nur zum Anpassen einer Geraden an Datenpunkte verwendet werden, sondern auch für beliebige Funktionen. Dadurch kann man eine bestimmte Funktion, z. B. ein Polynom oder eine Exponentialfunktion, bestmöglich an

einen Satz Daten anpassen. Man erhält dann Mittelwerte und Fehler für die Parameter dieser Funktion, also z. B. für die Koeffizienten eines Polynoms. (Dieses Verfahren bezeichnet man umgangssprachlich auch als „Fitten“ bzw. die erhaltene Funktion als „Fit“ an die Daten.) Heutzutage führt man dies meist mit numerischen Programmen durch. Es wird aber in diesem Praktikum nicht vorkommen. Später im Master-Praktikum (und ggf. im Beruf) arbeitet man oft mit dieser Methode, um die Daten auszuwerten. Sie sollte daher hier der Vollständigkeit halber erwähnt werden.

2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Das folgende Kapitel ist, wie in der Einleitung erwähnt, eine Ergänzung und stellt einige grundlegende Konzepte für Fehlerrechnung und Datenanalyse vor, vor allem die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und -verteilungen.

2.3.1 Grundlegende Begriffe

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wir wollen erst einmal einige begriffliche Definitionen treffen. Dabei steht wohl an erster Stelle das *Zufallsexperiment*. Darunter versteht man das wiederholte Notieren des Ausgangs eines zufälligen Prozesses. Als einfachstes Beispiel denken wir uns einen Würfel. Wir würfeln N -mal, notieren uns jeweils die Augenzahl X (die sog. *Zufallsvariable*), ohne dass sich am Würfel, der Unterlage o. ä. etwas ändert.

Nachdem wir N -mal gewürfelt haben, können wir uns einem weiteren Begriff zuwenden, nämlich dem der *Häufigkeit*. Wenn wir beispielsweise 60 mal würfeln, werden wir erwarten, dass jede Augenzahl 10 mal gewürfelt wurde (das wird natürlich so nur sehr selten eintreffen, denn es handelt sich ja um ein Zufallsexperiment!). Wir können die Anzahl der Ergebnisse N_i zu einem bestimmten Wert X_i in einer Tabelle angeben:

X_i	1	2	3	4	5	6
N_i	9	12	8	10	11	10

Der Index i bezeichnet dabei die verschiedenen möglichen Ergebnisse. $N_1 = 9$ bedeutet also: „Es wurde bei 60 Würfeln 9 mal die 1 gewürfelt“.

Man definiert die *Häufigkeit* h_i , indem man das Verhältnis zur Gesamtzahl der Ereignisse bildet, also:

$$h_i = \frac{N_i}{N} \quad (2.3.1)$$

Die Häufigkeit ist *normiert*:

$$\sum_i h_i = 1 \quad (2.3.2)$$

Unsere obige Tabelle sieht demnach in Häufigkeiten geschrieben folgendermaßen aus:

X_i	1	2	3	4	5	6
h_i	0,15	0,20	0,13	0,17	0,18	0,17

Nun definiert man die *Wahrscheinlichkeit* $p(X_i)$ als die Häufigkeit eines Ereignisses, die in dem Zufallsprozess eintreten sollte, wenn man ihn unendlich oft durchführen würde:

$$p(X_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} h_i \quad (2.3.3)$$

Ereignisse mit $p = 0$ nennt man *unmöglich*, solche mit $p = 1$ bezeichnet man als *sicher*. Ein idealer, nicht gezinkter Würfel sollte demnach die Wahrscheinlichkeiten $p(1) = p(2) = \dots = p(6) = \frac{1}{6}$ haben, da jede Augenzahl gleich häufig auftreten sollte, wenn man nur oft genug würfelt.

Auch Wahrscheinlichkeiten sind normiert; weiterhin gibt es keine negativen Wahrscheinlichkeiten. Es gilt also stets

$$0 \leq p(X_i) \leq 1 \quad (2.3.4)$$

sowie

$$\sum_i p(X_i) \equiv 1 \quad (2.3.5)$$

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Für den Umgang mit mehreren, *unabhängigen* Wahrscheinlichkeiten gelten folgende Rechenregeln. Seien im Folgenden p_A und p_B die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B:

Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Experiment Ereignis A **und** Ereignis B eintreffen, ist

$$\boxed{p_{A \text{ und } B} = p_A \cdot p_B} \quad (2.3.6)$$

Addition von Wahrscheinlichkeiten Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Experiment **entweder** Ereignis A **oder** Ereignis B eintritt, ist

$$p_{A \text{ oder } B} = p_A + p_B \quad (2.3.7)$$

Erwartungswert und Varianz

In der Statistik hat die Durchführung eines einzigen Zufallsexperiments keine große Aussagekraft. Bei der Durchführung vieler Experimente jedoch wird sich ein Durchschnittswert der Zufallsvariablen X_i einstellen. Man spricht dann vom *Erwartungswert*. Er ist definiert als

$$\hat{X} = E(X) = \sum_i p(X_i) X_i \quad (2.3.8)$$

Beim Würfeln mit $p(X_i) = \frac{1}{6}$ beträgt er $E(X) = 3,5$.

Neben dem Erwartungswert interessiert man sich in der Statistik für die Frage, wie stark die Ereignisse um den Erwartungswert streuen. Je stärker die Ereignisse um den Erwartungswert konzentriert sind, desto wahrscheinlicher ist es, bei einem Experiment genau den Erwartungswert zu erreichen oder ihm zumindest sehr nahe zu kommen. Das Maß für die Streuung der Ereignisse um den Erwartungswert ist die *Varianz*. Sie ist definiert als:

$$V(X) := E[(X - E(X))^2] \quad (2.3.9)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + E^2(X)] \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Die positive Quadratwurzel der Varianz heißt *Standardabweichung* σ :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)} \quad (2.3.11)$$

Kovarianz

Meist werden physikalische Größen durch die Messung mehrerer anderer Größen bestimmt. Dann ermittelt sich der Fehler aus der gaußschen Fehlerfortpflanzung. Dies ist aber nur zulässig, falls alle Größen voneinander unabhängig sind.

Oft ist nicht gesichert, ob Messwerte voneinander abhängig sind. Es kann ja durchaus sein, dass der physikalische Zusammenhang zwischen ihnen noch vollkommen unbekannt ist.

Ein eventueller Zusammenhang müsste sich aber in der Verteilung der Messgrößen wieder spiegeln. Dies bezeichnet man als *Kovarianz*. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$\text{cov}(X, Y) := E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] \quad (2.3.12)$$

Einige Beispiele sind in Abb. 2.3.1 gezeigt. Die Kovarianz zweier Messgrößen X und Y ist größer als 0 wenn die Messwerte für X , die größer als ihr Mittelwert $E(X)$ sind, gehäuft mit Messwerten von Y auftreten, die größer als $E(Y)$ sind. Bei einer Kovarianz kleiner als 0 treten entsprechend größere X -Werte gehäuft mit kleineren Y -Werten auf.

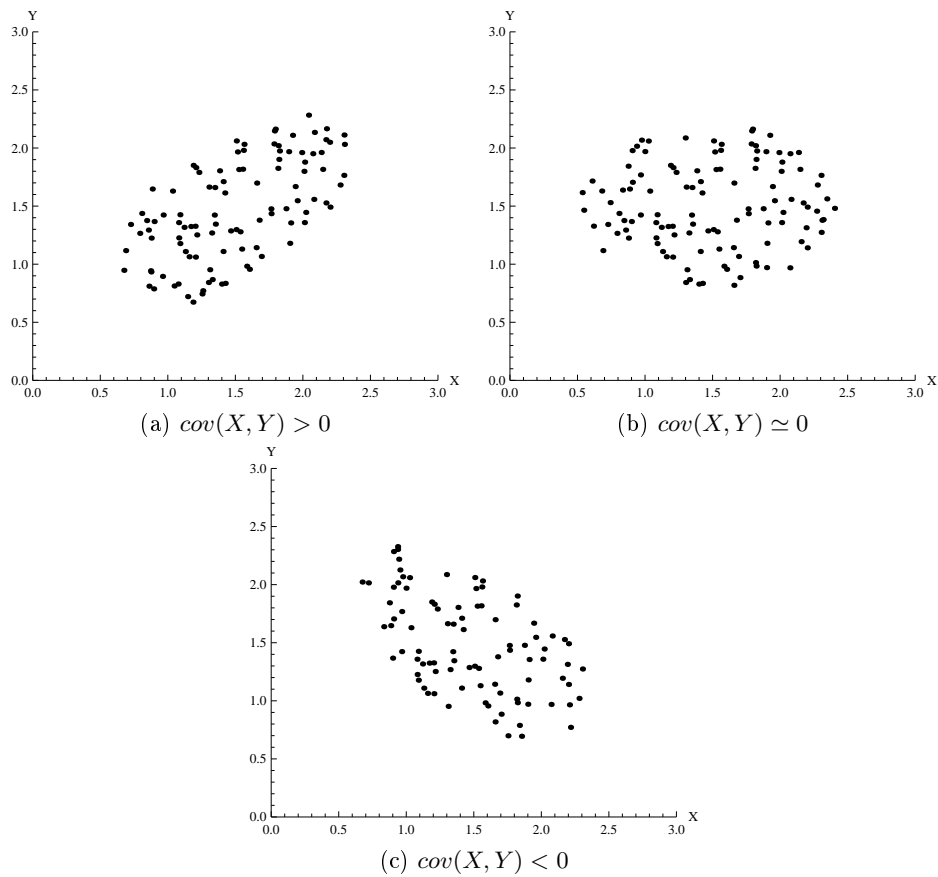


Abbildung 2.3.1: Einige Beispiele für verschiedene Kovarianzen.

Aus der Definition ergibt sich leicht:

$$\text{cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] \quad (2.3.13)$$

Die Kovarianz ist eine Verallgemeinerung der Varianz, denn es gilt:

$$V(X) = \text{cov}(X, X) \quad (2.3.14)$$

Ferner hat sie die Eigenschaften (a sei eine reelle Zahl):

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) \quad (2.3.15)$$

$$\text{cov}(a \cdot X, Y) = a \cdot \text{cov}(X, Y) \quad (2.3.16)$$

$$\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z) \quad (2.3.17)$$

Ist c eine konstante Zufallsvariable, so gilt $\text{cov}(X, c) = 0$.

Damit folgt die *lineare Transformation*:

$$\text{cov}(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y) \quad (2.3.18)$$

Messgrößen, die abhängig voneinander sind, heißen *korelliert*. Für *unkorellierte Größen* gilt:

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \quad (2.3.19)$$

Für eine endliche Menge von gemessenen Wertepaaren (x_i, y_i) mit $i = 1 \dots N$ schätzt man die Kovarianz durch:

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right) \quad (2.3.20)$$

Einigermaßen zuverlässige Werte für die Kovarianz erhält man aber nur für größere Werte von N .

Schließlich arbeitet man auch oft mit der sogenannten *Korrelation* $\rho(X, Y)$, die man definiert als:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.3.21)$$

Man kann zeigen, dass immer $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ gilt. Bei $\rho(X, Y) = 0$ sind X und Y unkorreliert, bei $\rho(X, Y) = +1$ bzw. -1 sind sie völlig korreliert bzw. antikorreliert. (In diesen Extremfällen besteht ein exakter linearer Zusammenhang zwischen ihnen.)

Kontinuierliche Verteilungen

Oft haben Zufallsexperimente keine diskreten Ergebnisse. Wenn wir z. B. kosmische Strahlung betrachten, so wird sich die Energie der registrierten Teilchen kontinuierlich in einem bestimmten Spektrum verteilen.

Weiterhin können Verteilungen streng genommen zwar diskret sein, die Anzahl der Zufallsvariablen X_i jedoch so groß werden, dass man sinnvollerweise von der diskreten zur kontinuierlichen Betrachtung übergeht.

Bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen hat man statt diskreter Einzelwahrscheinlichkeiten $p_1 \dots p_N$ eine (stetige) *Wahrscheinlichkeitsdichte* $w(x)$, die normiert ist: $\int w(x) dx = 1$. Man geht bei der Berechnung des Erwartungswertes $E(x)$ von der Summen- zur Integral-schreibweise über:

$$E(x) = \int x \cdot w(x) dx \quad (2.3.22)$$

Hinweis: Die Integrationsgrenzen erstrecken sich stets über den gesamten Gültigkeitsbereich von $w(x)$, also meist $-\infty < x < +\infty$.

Für Erwartungswert und Varianz bei kontinuierlichen Verteilungen gelten die gleichen Rechengesetze und Definitionen wie bei diskreten Verteilungen. Somit lässt sich die Varianz einer kontinuierlichen Verteilung berechnen durch

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = \int x^2 \cdot w(x) dx - \left(\int x \cdot w(x) dx \right)^2 \quad (2.3.23)$$

Aus der Wahrscheinlichkeitsdichte können nur die Wahrscheinlichkeiten für Wertebereiche und nicht für einzelne Werte bestimmt werden. So ist

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b w(x) dx \quad (2.3.24)$$

die Wahrscheinlichkeit, x zwischen a und b anzutreffen.

2.3.2 Zusammenhang mit physikalischen Messprozessen

Die Schwankungen, denen die Ergebnisse einer physikalischen Messung unterliegen, werden (wie in Abschnitt 2.1 beschrieben) durch Zufallsprozesse verursacht. In der Regel ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung, der diese Zufallsprozesse unterliegen, unbekannt. Es gibt jedoch einen wichtigen Satz in der Statistik, den sogenannten *Zentralen Grenzwertsatz*. Er besagt, dass bei einer großen Zahl von identischen, gleichverteilten Zufallsvariablen sich unabhängig von der eigentlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung immer insgesamt eine Normalverteilung ergibt (siehe auch Abs. 2.3.3):

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\hat{x}}{\sigma}\right)^2} \quad (2.3.25)$$

Eine solche Situation ist in der Regel die Messung einer Größe mit einem makroskopischen (aus sehr vielen Atomen und Molekülen aufgebauten) Messgerät. Man kann also üblicherweise bei physikalischen Messungen davon ausgehen, dass diese in einer Normalverteilung um den Mittelwert streuen.

Die Zufallsgröße tritt im Exponenten quadratisch auf. Ohne auf eine genauere theoretische Begründung eingehen zu wollen, so kann man doch zeigen, dass aus dieser Tatsache sowohl das Prinzip der kleinsten Quadrate als auch die „quadratische Addition“ in der gaußschen Fehlerfortpflanzung begründet werden können.

Berechnung des Fehlers des Mittelwerts

Mit den hier eingeführten Begriffen kann man nun den Faktor $1/\sqrt{N}$ aus Gleichung (2.2.7) erklären.

Die Varianz σ_x^2 einer Messgröße x gibt wie oben gesagt die mittlere quadratische Abweichung um den Mittelwert \bar{x} an, die bei einer Messung zu erwarten ist. Man kann sie aus einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung wie oben beschrieben durch $E[(x - \bar{x})^2]$ bestimmen. Wir interessieren uns aber nun für den wahren Wert \hat{x} und wollen die mittlere Abweichung des Mittelwerts \bar{x} um den wahren Wert ermitteln.

Dazu berechnen wir den Erwartungswert der quadratischen Abweichung des Mittelwerts vom wahren Wert.

$$\begin{aligned} E[(\bar{x} - \hat{x})^2] &= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \hat{x}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^N x_i - N\hat{x}\right)^2\right] = \frac{1}{N^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x})\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{j,k=1}^N (x_j - \hat{x})(x_k - \hat{x})\right] \stackrel{=0 \text{ für } j \neq k}{=} \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{j=1}^N (x_j - \hat{x})^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2} E[N\sigma^2] = \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Die Terme in dem obigen Schritt für $j \neq k$ sind $= 0$, da es sich hier um Kovarianzen handelt. Die Verteilungsfunktion für alle x_i ist natürlich dieselbe, so dass diese verschwinden. Somit erhält man den Zusammenhang $\Delta\bar{x} = \sqrt{E[(\bar{x} - \hat{x})^2]} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$ aus Gleichung (2.2.7).

2.3.3 Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Hier sollen noch einige wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen besprochen werden. Als erstes wird auf die kontinuierliche Normalverteilung eingegangen und danach die diskrete Binomial- sowie als wichtiger Grenzfall davon die Poisson-Verteilung vorgestellt.

Die Normalverteilung

Die Normalverteilung bzw. Gauß-Verteilung, deren Bedeutung im vorigen Abschnitt erklärt wurde, ist gegeben durch:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\hat{x}}{\sigma}\right)^2} \quad (2.3.27)$$

Der Parameter σ ist die Standardabweichung (wie man sie auch aus der Definition (2.3.23) über die Varianz erhalten würde), \hat{x} ist der Erwartungswert der Verteilung. σ ist ein Maß für die *Breite* der Verteilung, die um \hat{x} zentriert ist. Der Vorfaktor stellt die Normierung sicher. Die Standardabweichung ist bei dieser Verteilung so, dass 68,2% aller Messwerte im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ liegen. Es gilt also:

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\sigma}^{+\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cong 68,2\% \quad (2.3.28)$$

In einer 2σ -Umgebung liegen 95,5% und in einer 3σ -Umgebung liegen 99,7% der Messwerte. Da aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes physikalische Messfehler in der Regel Gauß-verteilt sind, ist der Fehler des Mittelwerts so zu interpretieren, dass der wahre Wert mit 68,2%-iger Wahrscheinlichkeit in einer Umgebung von $\Delta\bar{x}$ um den Mittelwert liegt, mit 95,5%-iger Wahrscheinlichkeit in einer $2\Delta\bar{x}$ -Umgebung, usw.

Die Binomialverteilung

Häufig tritt der Fall auf, dass in einem Zufallsexperiment nur zwei Ereignisse auftreten können und zwar **entweder** das eine **oder** das andere. Einfachstes Beispiel ist wohl das Werfen einer Münze: Entweder man erhält Wappen oder Zahl. (Dass die Münze auf der Kante stehen bleibt, wollen wir hier einmal ausschließen... :-)

Solche Zufallsexperimente heißen *binomialverteilt*. Da sich beide Ereignisse ausschließen, spricht man neben der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen des Ereignisses A von der *Gegenwahrscheinlichkeit* q für das Eintreffen von Ereignis B. Wegen (2.3.5) gilt

$$q = 1 - p \quad (2.3.29)$$

Die Wahrscheinlichkeit P bei N -facher Durchführung eines Zufallsexperiments k -mal das Ereignis A zu erhalten ist gegeben durch die *Binomialverteilung*:

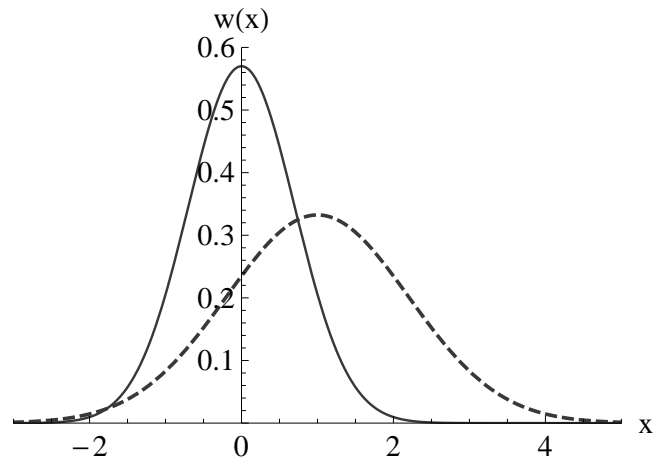


Abbildung 2.3.2: Die Normalverteilung mit $\hat{x} = 0$, $\sigma = 0,7$ (durchgezogene Linie) und $\hat{x} = 1$, $\sigma = 1,2$ (gestrichelte Linie).

$$P_k^N = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (2.3.30)$$

Die *Binomialkoeffizienten* sind gegeben durch

$$\binom{N}{k} := \frac{N!}{k!(N-k)!} \quad (2.3.31)$$

Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Wir wollen nun den Erwartungswert der Binomialverteilung (2.3.30) bestimmen:

$$E(k) = \sum_{k=0}^N k P_k^N = \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (2.3.32)$$

Nun bedienen wir uns eines Tricks: Wir verwenden einfach, dass $\frac{\partial}{\partial p} p^k = k p^{k-1}$ ist.

Damit erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \sum_{k=0}^N p \frac{\partial}{\partial p} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (2.3.33)$$

Wir ziehen nun $p \frac{\partial}{\partial p}$ vor das Summationszeichen:

$$\sum_{k=0}^N p \frac{\partial}{\partial p} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (2.3.34)$$

Nun verwenden wir den *Binomischen Satz*, wie er aus der Analysis bekannt ist:

$$(p + q)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (2.3.35)$$

Demnach können wir also schreiben:

$$p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = p \frac{\partial}{\partial p} (p + q)^N = Np(p + q)^{N-1} \quad (2.3.36)$$

Mit (2.3.29) folgt $(p + q)^{N-1} = 1$ und wir erhalten schließlich

$$\boxed{E(k) = N \cdot p} \quad (2.3.37)$$

Für die Bestimmung der Varianz benötigen wir noch $E(k^2)$. $E^2(k)$ haben wir mit (2.3.37) ja im Grunde genommen schon berechnet, es ist

$$E^2(k) = N^2 p^2 \quad (2.3.38)$$

Zur Bestimmung von $E(k^2)$ bedienen wir uns wieder des „Ableitungstricks“. Wir müssen diesmal allerdings zweimal ableiten, um statt k im Summenzeichen k^2 zu erhalten:

$$E(k^2) = \sum_{k=0}^N k^2 \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \sum_{k=0}^N \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (2.3.39)$$

Wir ziehen die Ableitungen wieder aus der Summe und verwenden (2.3.35):

$$\sum_{k=0}^N \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p + q)^N \quad (2.3.40)$$

Wir führen die Differentiationen aus und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right) \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right) (p+q)^N \\
= & \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right) Np(p+q)^{N-1} \\
= & Np [(p+q)^{N-1} + p(N-1)(p+q)^{N-2}] \\
= & Np [1 + p(N-1)] \\
= & Np + N^2p^2 - Np^2 \tag{2.3.41}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$V(k) = E(k^2) - E^2(k) = Np + N^2p^2 - Np^2 - N^2p^2 = Np - Np^2 = Np(1-p) \tag{2.3.42}$$

Mit $1-p=q$ folgt dann die gesuchte Varianz der Binomialverteilung:

$$\boxed{V(k) = N \cdot p \cdot q} \tag{2.3.43}$$

Die Poisson-Verteilung

Die Binomialverteilung wird für große N sehr unhandlich (Versuchen Sie einmal, 100! auf Ihrem Taschenrechner auszuführen!). Gilt $N \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$, so verwendet man die *Poisson-Verteilung*:

$$\boxed{P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}} \tag{2.3.44}$$

Radioaktive Zerfälle sind beispielsweise Poisson-verteilt (Die Anzahl der Kerne N ist sehr hoch, die Wahrscheinlichkeit für einen Zerfall aber meist sehr, sehr gering). Ist $N \rightarrow \infty$ und $p \rightarrow 0$ nicht mehr gegeben, N aber weiterhin sehr groß, so lässt sich die Binomialverteilung durch eine Gauß-Verteilung nähern.

Für den Erwartungswert der Poisson-Verteilung kann man zeigen:

$$\hat{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \mu \tag{2.3.45}$$

sowie für die Varianz:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\mu)^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \mu \tag{2.3.46}$$

Bei der Poisson-Verteilung sind also Erwartungswert und Standardabweichung identisch.

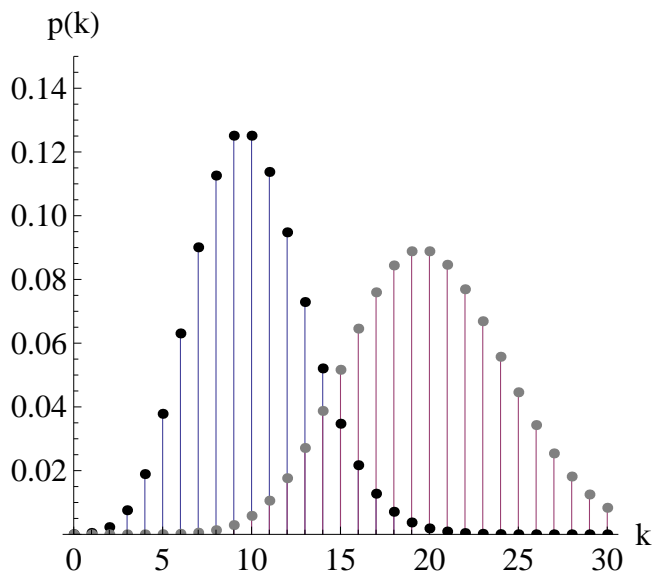


Abbildung 2.3.3: Die Poisson-Verteilung für $\mu = 10$ (schwarz) und $\mu = 20$ (grau).

3 Die Wheatstone-Brücke

3.1 Einführung

In diesem Versuch sollen die Widerstände verschiedener passiver Bauelemente mit Hilfe der Wheatstoneschen Brückenschaltung bestimmt werden. Dies ist ein Alternativverfahren zur Bestimmung des Widerstandes direkt über das Ohmsche Gesetz $U = R \cdot I$, was eine Messung von Spannung und Stromstärke erfordern würde.

Der Versuch setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

- Im ersten Teil des Versuchs sollen mit Hilfe einer Wheatstoneschen Messbrücke folgende unbekanntes Größen gemessen werden:
 - der Widerstand eines ohmschen Widerstandes
 - der Wechselstromwiderstand (auch kapazitiver Widerstand oder Blindwiderstand) eines Kondensators
- Im zweiten Teil wird die Temperaturabhängigkeit verschiedener Leitertypen untersucht. Anhand der Leitfähigkeit bei verschiedenen Temperaturen sollen folgende Leitertypen identifiziert werden:
 - metallischer Leiter
 - Halbleiter
 - temperaturunabhängiger Leiter

3.2 Physikalische Grundlagen

Hier soll kurz auf die für den Versuch notwendigen Grundlagen eingegangen werden. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser bereits mit folgenden Begriffen vertraut ist:

- Spannung
- Stromstärke
- ohmscher Widerstand/ohmsches Gesetz

3.2.1 Spezifischer Widerstand

Der Widerstand R ist abhängig von der Geometrie des Leiters und seinen Materialeigenschaften. Es ergibt sich:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (3.2.1)$$

Der Widerstand R ist proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zum Querschnitt A . Die Materialkonstante ρ heißt *spezifischer Widerstand*.

3.2.2 Kirchhoffsche Regeln

In einem abgeschlossenen System bleibt die Ladung erhalten. Daraus folgt, dass Strom, welcher in einen Punkt hineinfließt, dort nicht verschwinden kann. Er muss somit wieder abfließen. Es folgt die *Knotenregel*:

In einem Knoten ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

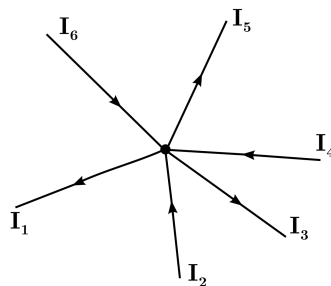


Abbildung 3.2.1: Zur Knotenregel: Es gilt hier $\sum I_k = 0$

Aus der Energieerhaltung für das elektrostatische Feld folgt automatisch die *Maschenregel*. Sie gilt, solange kein Austausch mit anderen Energieformen stattfindet, z. B. durch die Erzeugung eines zeitlich veränderten Magnetfeldes. Sie lautet:

In einem geschlossenen Teilkreis (Masche) ist die Summe der auftretenden Spannungen immer null.

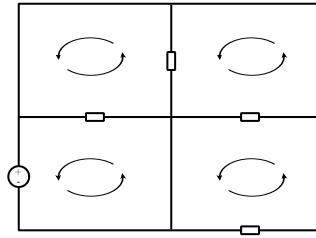


Abbildung 3.2.2: Zur Maschenregel: Für jede Masche gilt $\sum U_k = 0$

3.2.3 Wechselstromwiderstände

Die Kirchhoffschen Gesetze gelten nicht nur für ohmsche Widerstände, sondern auch für kapazitive (z. B. Kondensator) und induktive (z. B. Spule) Widerstände. Bei einer Wechselspannung mit einer Kreisfrequenz ω gilt nun:

- *Ohmscher Widerstand:* $R = \frac{U}{I}$
Spannung und Stromstärke sind in Phase.
- *Kapazitiver Widerstand:* $X_C = \frac{U}{I} \Rightarrow X_C = \frac{-j}{\omega C}$
Die Spannung hängt der Stromstärke um 90° hinterher.

Man beachte dabei, dass eine Gleichspannung dem Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ entspricht, dh. ein kapazitiver Widerstand leitet keinen Strom mehr (sein Widerstand wird „unendlich“).

Bei kapazitiven Widerständen ist der ohmsche Widerstand vernachlässigbar klein. Da eine Spule jedoch aus einem aufgewickelten Draht besteht, hat sie einen nicht zu vernachlässigenden ohmschen Widerstand. Man kann sich eine reale Spule aus einer idealen Spule (rein induktiver Widerstand) und einem ohmschen Widerstand zusammengesetzt vorstellen.

3.2.4 Zeigerdiagramme

Da bei kapazitiven Widerständen Stromstärke und Spannung nicht in Phase laufen, ist auf den ersten Blick die Phasendifferenz von Wechselstromkreisen mit verschiedenen Widerständen nicht ersichtlich. Zur Verdeutlichung benutzt man Zeigerdiagramme.

Auf der reellen Achse werden Strom und ohmscher Widerstand eingezeichnet, auf der imaginären Achse entsprechend ihrer Vorzeichen der kapazitive Widerstand. Die Teilspannungen in einem Netzwerk von Widerständen werden vektoriell addiert. Es ergibt sich die Spannung U_{ges} , die um den Winkel φ von der Phase des Stromes abweicht.

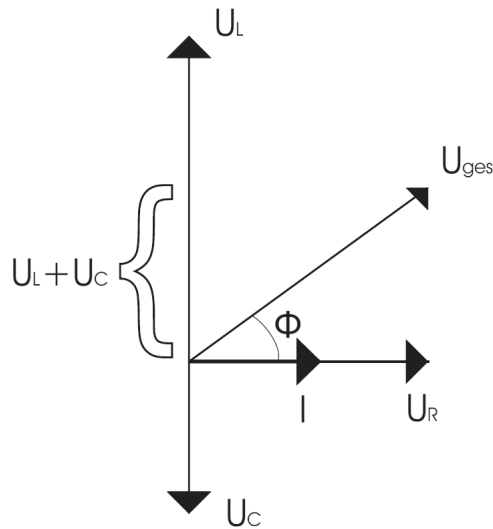


Abbildung 3.2.3: Zeigerdiagramm.

3.2.5 Typen von Leitern

Metallischer Leiter

Die Ladungsträger in einem metallischen Leiter sind Elektronen, diese befinden sich in ständiger thermischer Bewegung. Da der Leiter nach außen jedoch elektrisch neutral ist, gilt für den Durchschnitt der thermischen Geschwindigkeiten v_{th} aller Elektronen im Leiter $\vec{v}_{th} = \vec{0}$. Wird nun an den Leiter ein äußeres elektrisches Feld angelegt, erfahren die Elektronen eine Kraft, die sie in eine Richtung beschleunigt. Jetzt können sich die Elektronen in einem Leiter jedoch nicht frei bewegen, sondern stoßen ständig mit ihren Rümpfen zusammen. Die Elektronen erfahren eine Art Reibungskraft, die dafür sorgt, dass sie nur bis auf eine bestimmte Geschwindigkeit, die Driftgeschwindigkeit v_d , beschleunigt werden. Je größer die Temperatur T des Leiters, desto größer die thermische Bewegung der Atomrümpfe sowie der Elektronen und desto wahrscheinlicher ein Zusammenstoß. Es ist daher festzuhalten: *Mit steigender Temperatur nimmt der Widerstand eines metallischen Leiters zu.*

Für den spezifischen Widerstand eines metallischen Leiters gilt (wobei C_1 eine Materialkonstante ist):

$$\rho = C_1 \cdot T \quad (3.2.2)$$

Auf die Herleitung dieser Beziehung soll an dieser Stelle verzichtet werden. Eine detaillierte Herleitung sollte sich in Lehrbüchern über Elektrodynamik unter dem Stichwort *metallische Leiter* finden lassen (z.B. Demtröder, „Experimentalphysik 2“, 2. Auflage, S. 43f. und S. 47ff. oder Otten, „Repetitorium der Experimentalphysik“, S. 498ff.).

Bemerkung:

Je nach Reinheitsgrad ist diese Abhängigkeit nicht rein linear und es kann passieren, dass der

Widerstand mit sinkender Temperatur einen konstanten Restwiderstand annimmt. Zu dem gilt diese Beziehung nur für einen eingeschränkten Temperaturbereich, bei sehr niedrigen und sehr hohen Temperaturen treten andere Effekte auf, z.B. Supraleitung bei niedrigen Temperaturen.

Halbleiter

Mit Hilfe des mechanischen Modells, das für die metallischen Leiter verwendet wurde, kann man die Effekte, die in Halbleitern auftreten, nicht beschreiben. Hier muss man das sog. Bändermodell heranziehen. Im Bändermodell befinden sich Elektronen entweder im Leiterband, wo sie zum Strom beitragen können, oder im Valenzband, wo sie dies nicht können. Bei einem Leiter sind Leiterband und Valenzband direkt beieinander, bei einem Isolator sehr weit voneinander getrennt. Bei einem Halbleiter jedoch, ist die Lücke (Gap) gerade so groß, dass Elektronen vom Valenz- ins Leiterband springen können. Dazu genügt es, die Temperatur des Halbleiters zu erhöhen und so thermische Energie hinzuzufügen. Wir halten fest: *Der Widerstand eines Halbleiters nimmt mit steigender Temperatur ab.* Die Größe der Lücke, genannt Gapbreite E_G , kann je nach Halbleiter bis zu 3 eV betragen.

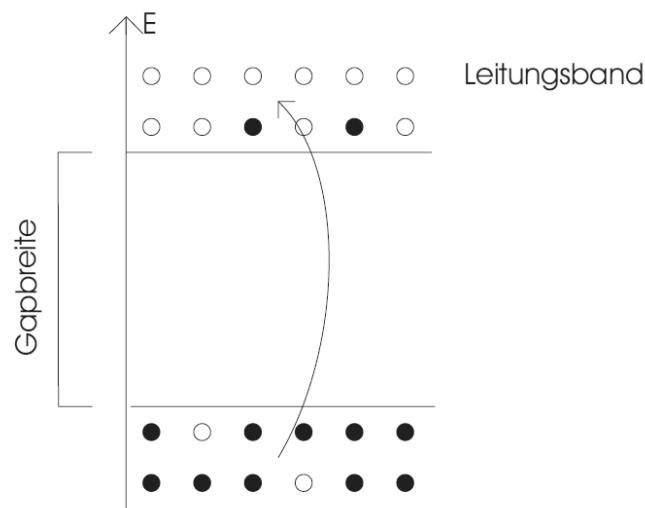


Abbildung 3.2.4: Bändermodell für Leiter, Halbleiter und Isolator.

Für den Widerstand eines Halbleiters in Abhängigkeit von T gilt:

$$R = C_2 \cdot \exp\left(\frac{E_G}{2k_B \cdot T}\right) \quad (3.2.3)$$

Dabei ist k_B die Boltzmann-Konstante, T die Temperatur in Kelvin und C_2 eine Materialkonstante. Wir verzichten hier wieder auf eine ausführliche Herleitung (sie ist z.B. in Vogel, „Gerthsen Physik“ 20. Auflage, S. 401ff zu finden).

Temperaturunabhängiger Leiter

Dieser besteht aus einem Gemisch aus metallischen Leitern und Halbleitern. Diese Mischung ist so gewählt, dass der Leiter über weite Temperaturbereiche einen möglichst konstanten Widerstand besitzt.

3.3 Versuchsaufbau

Die Messapparatur besteht aus:

- Einer Gleichspannungsquelle U_0 zur Messung der ohmschen Widerstände
- Bzw. einer Wechselspannungsquelle zur Messung des kapazitiven Widerstands
- Einem bekannten Vergleichswiderstand Z_0 , jeweils realisiert durch
 - eine Ohm-Dekade, als ohmschen Vergleichswiderstand
 - eine C-Dekade, als kapazitiven Vergleichswiderstand
- Dem unbekanntem, zu bestimmenden Widerstand Z_x
- Einem digitalen Amperemeter
- Einem Schiebewiderstand, auf dem das Verhältnis R_1 zu R_2 eingestellt
- Einem Maßstabe, der am Schiebewiderstand befestigt ist, mit dem die Länge $l_1 \sim R_1$ bzw. $l_2 \sim R_2$ abgelesen werden kann

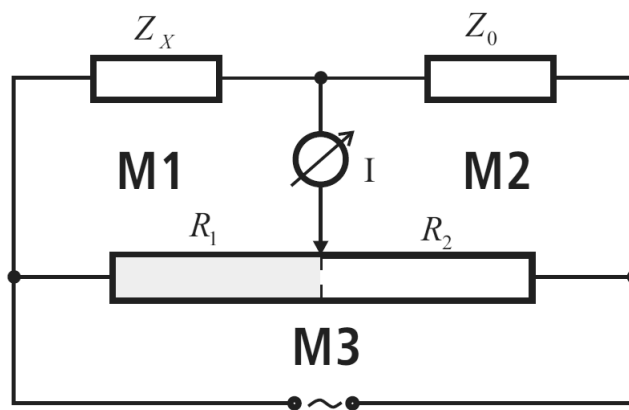


Abbildung 3.3.1: Wheatstone-Brücke.

Die Brückenschaltung besteht aus dem bekannten Vergleichswiderstand Z_0 , dem unbekanntem Widerstand Z_x und dem Schiebewiderstand, mit dem das Verhältnis $R_1 - R_2$ eingestellt

werden kann. Die Widerstände R_1 und R_2 bilden die eigentliche Brücke (eingespannter Draht). Sie werden durch einen Schleifkontakt realisiert, d. h. der mittlere Abgriff kann verschoben werden. Da wie bereits weiter oben erwähnt, ein ohmscher Widerstand proportional zu seiner Länge ist, kann jedes gewünschte Verhältnis eingestellt werden.

Somit kann die Brücke bei geeignetem Vergleichswiderstand so gewählt werden, dass durch das Amperemeter kein Strom mehr fließt. Ist diese Einstellung gefunden, kann über die Kirchhoffschen Regeln der unbekannte Widerstand bestimmt werden. Man erhält nach wenigen Schritten die Beziehung:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_x}{Z_0} \quad (3.3.1)$$

Diese gilt sowohl für ohmsche als auch für kapazitive Widerstände.

3.4 Versuchsdurchführung

3.4.1 Erster Teil

Zur Bestimmung des ohmschen und des kapazitiven Widerstandes wird die Schaltung wie in Abb. 3.3.1 (S. 34) aufgebaut. Für den ohmschen Widerstand wird eine Gleichspannungsquelle verwendet, für den kapazitiven Widerstand eine Wechselspannungsquelle, in unserem Fall sinusförmig mit einer Frequenz von ca. 1kHz, verwendet. Es ist die Messbrücke für jeweils drei Vergleichswiderstände, die mit Hilfe der R- bzw. C-Dekade realisiert werden, abzugleichen. Das bedeutet, der Schiebewiderstand ist so einzustellen, dass das Amperemeter keinen Strom mehr anzeigt. Die Länge l_1 und der Vergleichswiderstand R_0 sind jeweils zu notieren. Es ist darauf zu achten, den Vergleichswiderstand R_0 so zu wählen, dass sich l_1 in einem Bereich von 25cm bis 75cm befindet, da dort der Fehler am geringsten wird (vgl. Absch. 2).

3.4.2 Zweiter Teil

Hier geht man im Wesentlichen so vor, wie bei der Bestimmung des unbekanntes ohmschen Widerstandes. Zunächst ist jedoch der Behälter, in dem sich die drei Leitertypen befinden, mit knapp unter 100°C heißem Wasser zu befüllen. Damit im Wasserbad beim Abkühlen kein Temperaturgradient entsteht, sollen die vorhandenen Rührfische benutzt werden, um die Flüssigkeit in Bewegung zu halten. Die Wassertemperatur im Behälter ist während des ganzen Versuches kontinuierlich zu kontrollieren.

Da hier der ohmsche Widerstand der Leitertypen bestimmt werden soll, wird wie in Abb. 3.3.1 (S. 34) aufgebaut und eine Gleichspannungsquelle verwendet. Erreicht die Wassertemperatur 90°C, ist der Widerstand der drei Leiter durch Abgleichen der Brücke zu bestimmen. Dies wird während des Abkühlens alle 10°C wiederholt, bis das Wasser auf Raumtemperatur abgekühlt ist. Es sind jeweils die Nummer des Leiters, der Vergleichswiderstand R_0 , die Länge l_1 und die Temperatur T zu notieren. Bei der Auswertung des Halbleiters ist unbedingt darauf zu achten, die Temperatur von Grad Celsius in Kelvin umzurechnen!

3.5 Aufgaben und Auswertung

3.5.1 Aufgaben zur Vorbereitung

1. Leiten Sie Gleichung 3.3.1 her.
2. Berechnen Sie, bei welchem Verhältnis $R_1 - R_2$ der Messfehler minimal wird.

3.5.2 Auswertung

1. Ermitteln Sie die Werte und Fehler für die gemessenen Widerstände.
2. Bestimmen Sie bei der Temperaturabhängigkeitsmessung, welcher der drei Widerstände Halbleiter, Leiter oder konstanter Widerstand ist. Tragen Sie die Werte aller Widerstände in ein R-T-Diagramm ein.
3. Tragen Sie für den Halbleiter zusätzlich $\ln R$ gegen die reziproke Temperatur in K^{-1} (nicht C!) auf und bestimmen Sie aus der Steigung die Gapbreite.
4. Machen Sie sich Gedanken über die systematischen Fehler in allen Versuchsteilen und schätzen Sie diese ab.

Hinweise – Erster Teil: Es ist günstig, einen mit $w_i = \frac{1}{\sigma_i(Z_{(x,i)})^2}$ gewichteten Mittelwert zu bilden (mit $i = 1, \dots, N$ und N ist die Anzahl der Messungen):

$$\bar{Z}_x = \frac{\sum w_i Z_i}{\sum w_i} \quad (3.5.1)$$

Hinweise – Zweiter Teil: Um aus den Messwerten die Gapbreite E_G zu bestimmen, zeichnet man (mit $i = 1, \dots, N$ und N ist die Anzahl der Messpunkte):

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{T_i} \\ y_i &= \ln(R_i) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Mit diesen Punkten führt man eine gewichtete lineare Regression durch:

$$y_i = \ln(R_i) = m \cdot x_i + b \quad (3.5.3)$$

Wegen $\ln(R) = \frac{E_G}{2k_B T} + \ln(C)$ (vgl. Gl. (3.2.3) S. 33) folgt dann:

$$E_G = \alpha \cdot 2k_B \quad (3.5.4)$$

Hinweise – Fehlerabschätzung: Die Messtoleranzen der Multimeter sind der entsprechenden Anleitung der Geräte für den jeweiligen Messbereich zu entnehmen.

4 Millikan-Versuch

4.1 Einführung

Mit diesem Versuch soll die Ladung des Elektrons e bestimmt werden.

4.2 Physikalische Grundlagen

Eine Kugel hat den Radius r und bewegt sich in einem Medium der Viskosität η und nimmt dort eine Endgeschwindigkeit v an. Dann steht die Kugel unter dem Einfluss einer konstanten Reibungskraft F . Diese Kraft ist gegeben durch das Stokessches Reibungsgesetz, das nur für sphärische Objekte gültig ist:

$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (4.2.1)$$

Durch Zerstäubung von Öl entstehen feine Tröpfchen mit einem Durchmesser von etwa $1 \mu\text{m}$. Sie sind geringfügig positiv oder negativ mit einem Vielfachen der Elementarladung e aufgeladen. Sie werden in ein elektrisches Feld eines Plattenkondensators hineingeblasen. In diesem elektrischen Feld überlagert sich die Schwerkraft und die elektrostatische Anziehungskraft.

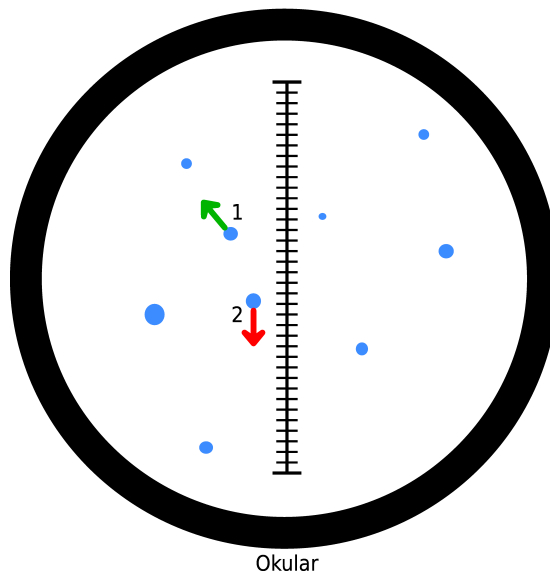


Abbildung 4.2.1: Blick durch das Mikroskop. Der Abstand von zwei Teilstrichen zueinander beträgt $48 \pm 2 \mu\text{m}$.

Bei der Messung betrachtet man die Geschwindigkeit eines Tröpfchens mit angelegter Spannung U und ohne Spannung. Deswegen gibt es im Folgenden zwei Indizes. Mit angelegter Spannung steigt das Tröpfchen, somit bezeichnet v_2 die Geschwindigkeit eines steigenden, v_1 die Geschwindigkeit eines fallenden Tröpfchens. Durch das Mikroskop sieht man das allerdings genau andersherum. In Abbildung 4.2.1 ist es anschaulich dargestellt.

Im Kräftegleichgewicht gilt:

$$-mg + e \frac{U}{d} - 6\pi\eta r v_2 = 0 \quad (4.2.2)$$

$$mg - 6\pi\eta r v_1 = 0 \quad (4.2.3)$$

Dabei ist die Masse m des Tröpfchens über die Dichte ρ des Öls gegeben als

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \quad (4.2.4)$$

Nach Gleichsetzen der Gleichungen 4.2.2 und 4.2.3 und Einsetzen in 4.2.4 folgt dann:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2\rho g}} \quad (4.2.5)$$

$$e = \frac{6\pi\eta d(v_1 + v_2)}{U} r = \frac{6\pi\eta d(v_1 + v_2)}{U} \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2\rho g}} \quad (4.2.6)$$

$$(4.2.7)$$

Die Konstanten lauten:

$$\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \quad \text{Viskosität der Luft bei } 20^\circ\text{C} \quad (4.2.8)$$

$$d = 6 \text{ mm} \quad \text{Abstand der Kondensatorplatten} \quad (4.2.9)$$

$$\rho = 0,87 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad \text{Dichte des benutzten Öls} \quad (4.2.10)$$

Die Geschwindigkeit der Tröpfchen berechnet sich nach aus der Mechanik bekannten Formel, s ist der zurückgelegte Weg:

$$v = \frac{s}{t} \quad (4.2.11)$$

$$(4.2.12)$$

Der relative Fehler von v ist gegeben durch die bekannte Relation der Fehlerfortpflanzung:

$$\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 \quad (4.2.13)$$

Die Ladung der Tröpfchen wird mit der zuvor gefundenen Formel berechnet. Ihren Fehler findet man mittels Fehlerfortpflanzung ($\tau = 6\pi\eta d\sqrt{\frac{9\eta}{2\rho g}}$):

$$e = \frac{6\pi\eta d(v_1 + v_2)}{U} r = \frac{6\pi\eta d(v_1 + v_2)}{U} \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2\rho g}} \quad (4.2.14)$$

$$\sigma_e = \sqrt{\left(\frac{(3v_1 + v_2)\tau\sigma_{v_1}}{2U\sqrt{v_1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau\sqrt{v_1}\sigma_{v_2}}{U}\right)^2 + \left(\frac{\tau(v_1 + v_2)\sqrt{v_1}\sigma_U}{U^2}\right)^2} \quad (4.2.15)$$

4.3 Versuchsbeschreibung

An einen Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von 6 mm wird eine Spannung U von 0 bis 600 V angelegt. In dieses elektrische Feld des Plattenkondensators werden Öltröpfchen mittels Zerstäubung hineingeblasen. Diese werden durch Reibung elektrisch geladen. Mit einem Mikroskop werden die Tröpfchen in Dunkelfeldbeleuchtung als Lichtpunkte gesehen. Man misst die Zeit, in der die Tröpfchen eine bestimmte Strecke zurückgelegt haben. Möglich ist das mit Hilfe eines Okularmaßstabes. Zwei Teilstriche haben einen Abstand zueinander von $48 \pm 2 \mu\text{m}$, siehe Abbildung 4.2.1. Mit dem nun bekannten zurückgelegten Weg und der gemessenen Zeit kann die Geschwindigkeit der Tröpfchen bestimmt werden.

4.4 Versuchsdurchführung

Aus einer Wolke von Tröpfchen, die beim Zerstäuben entsteht, wählt man ein geeignetes heraus, das ohne elektrisches Feld genügend langsam fällt und beim Anlegen eines Feldes von 300V/6mm bis 600V/6mm langsam steigt.

Man misst zunächst mit der Stoppuhr seine Steiggeschwindigkeit und die zugehörige Spannung. Anschließend wird seine Fallgeschwindigkeit im feldfreien Raum gemessen. Eine Person sollte immer die Tröpfchen im Auge behalten und die Stoppuhr bedienen, während die andere Person die Spannungen einstellt.

4.5 Auswertung

Es sollen 20 Tröpfchen beobachtet und jeweils die Ladung und der Radius der Tröpfchen bestimmt werden. Für gleich große Tröpfchen sind die Ladungen die gleichen Vielfachen der Elementarladung.

- Bestimmen Sie die Elementarladung.
- Wie groß ist die Abweichung zum Literaturwert? ($e_{lit} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, Diskrepanz)
- Wodurch kommt diese Abweichung zustande?

Wir wissen, dass die errechneten Ladungen jeweils ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung entsprechen. In einem Diagramm, in dem man die Ladung der Tröpfchen nach 4.2.6 einzeln aufträgt finden sich Häufungslinien. Das ist beispielhaft in Abbildung 4.5.1 zu sehen.

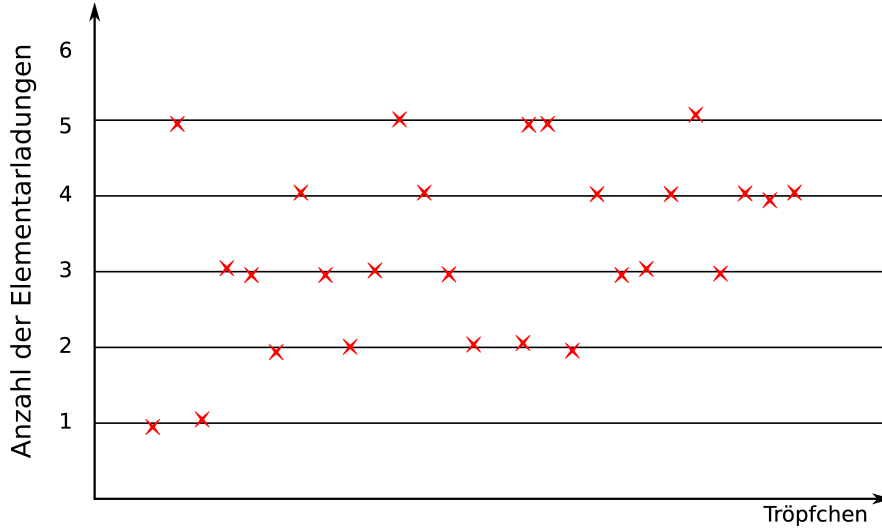


Abbildung 4.5.1: Häufungslinien

Nun bestimmt man die Funktionen der einzelnen Häufungslinien; hierfür überlege dir sowohl eine analytische als auch eine grafische Methode. Welche wirst du anwenden? Anschließend bestimmt man die Abstände der benachbarten Geraden. Mit dem gewichteten Mittel kann man nun die Elementarladung bestimmen. s_{ij} sei der Abstand zweier benachbarten Geraden i und j .

$$\langle e \rangle = \frac{\sum \omega_{ij} s_{ij}}{\sum \omega_{ij}} \quad (4.5.1)$$

$$\sigma \langle e \rangle = \sqrt{\frac{1}{\sum \omega_{ij}}} \quad (4.5.2)$$

mit $\omega_{ij} = \frac{1}{\sigma_{s_{ij}}^2}$.

5 Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons

5.1 Einführung

In diesem Versuch soll die spezifische Ladung des Elektrons, das Verhältnis seiner Ladung e zu seiner Masse m , mit Hilfe eines Helmholtzspulenpaars ermittelt werden.

5.2 Physikalische Grundlagen

5.2.1 Bewegte Ladungen im Magnetfeld

Bewegt sich ein Ladungsträger im Magnetfeld, so wirkt auf ihn die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}. \quad (5.2.1)$$

Hierbei bezeichnet q die elektrische Ladung und \vec{v} die Geschwindigkeit des Ladungsträgers, \vec{B} ist die Magnetfeldstärke.

Ein Helmholtzspulenpaar erzeugt mittig ein homogenes Magnetfeld. Erfolgt die Bewegung eines Elektrons senkrecht zum homogenen magnetischen Feld (Abb. 5.2.1), so wirkt auf das Elektron eine konstante Kraft F_L von

$$F_L = e \cdot v \cdot B \quad (5.2.2)$$

wobei $\vec{F}_L \perp \vec{v}$ und $\vec{F}_L \perp \vec{B}$ ist.

Das Elektron bewegt sich dann auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Die Lorentzkraft agiert in diesem Fall als Zentrifugalkraft F_Z . Es gilt also

$$e \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{r}. \quad (5.2.3)$$

Durch Umstellen erhält man

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{B \cdot r}. \quad (5.2.4)$$

In diesem Versuch wird das Elektron durch eine elektrische Spannung U beschleunigt und besitzt somit eine kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2 = eU$. Stellt man diese Gleichung nach der Geschwindigkeit v um und setzt sie dann in Gleichung 5.2.4 ein, so ergibt sich schließlich für die spezifische Ladung $\frac{e}{m}$ des Elektrons

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{(B \cdot r)^2}. \quad (5.2.5)$$

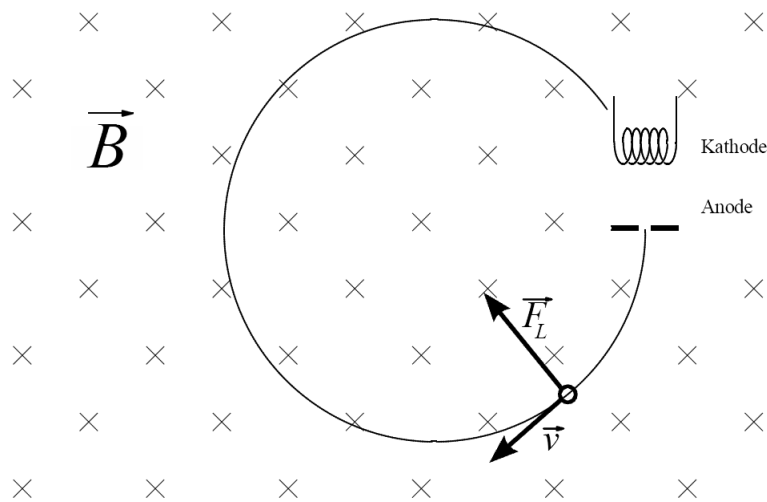


Abbildung 5.2.1: Elektronenbahn in einem Magnetfeld B senkrecht zur Zeichenebene.

5.2.2 Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes durch ein Helmholtzspulenpaar

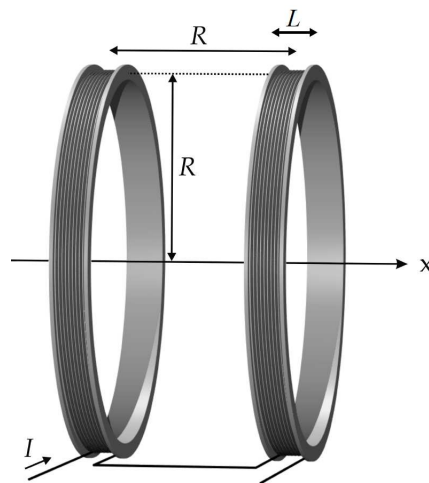


Abbildung 5.2.2: Helmholtzspulenpaar.

Ein Helmholtzspulenpaar besteht aus zwei Spulen der Windungszahl n im Abstand R zueinander.

Die magnetische Feldstärke B im Mittelpunkt einer einzigen Spule lässt sich mit Hilfe der

magnetischen Feldkonstante μ_0 , der Windungszahl n , der Stromstärke I und des Radius durch

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{nI}{R} \quad (5.2.6)$$

berechnen.

Die Länge L der Spule sollte klein gegenüber dem Radius R sein.

Ein Helmholtzspulenpaar erzeugt ein homogenes Feld indem man zwei dieser Spulen parallel bezüglich ihrer Symmetrie-Achse so aufstellt, dass sich ihre Mittelpunkte im Abstand des Radius R befinden. Werden diese Spulen nun in gleicher Richtung vom Strom I durchflossen, so ergibt sich im Inneren des Spulensystems ein homogenes Feld der Stärke

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu_0 \frac{nI}{R}. \quad (5.2.7)$$

5.3 Versuchsaufbau

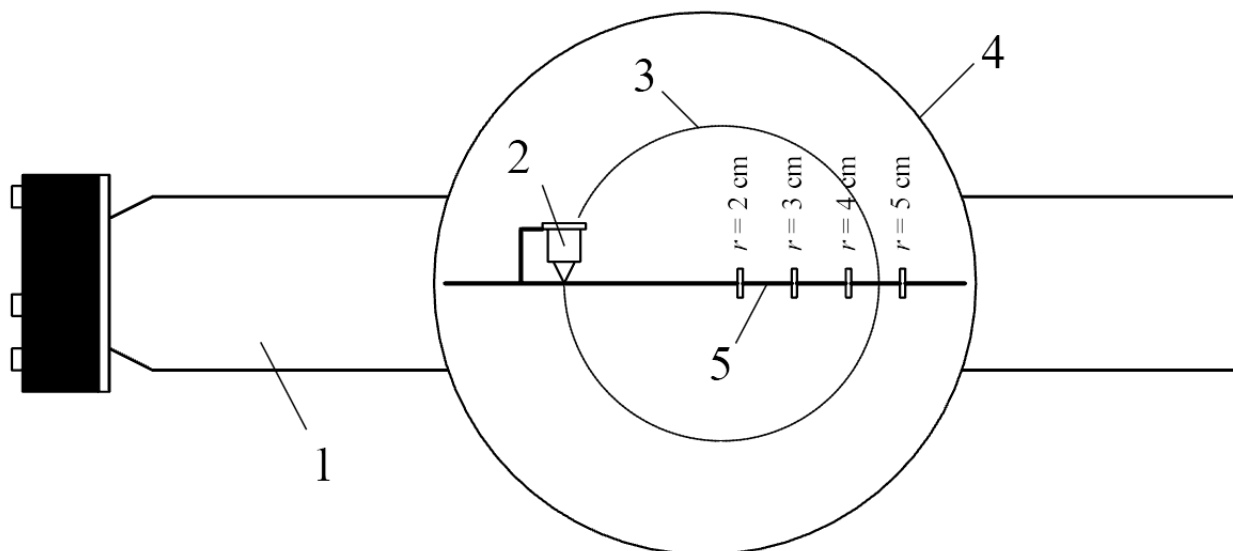


Abbildung 5.3.1: Schematischer Aufbau des Fadenstrahlrohrs: 1 - Halterung mit Spannungsversorgung, 2 - Elektronenquelle, 3 - Elektronenstrahl, 4 - Strahlrohr, 5 - Radius-Markierung.

Im Inneren des Helmholtzspulenpaars befindet sich eine Fadenstrahlröhre (Abb. 5.3.1), die mit Edelgas gefüllt ist. Eine Glühkathode dient als Elektronenquelle. Dort werden die freigesetzten Elektronen durch die Spannung U zur Anode hin beschleunigt. Durch ein kleines

Loch gelangen die Elektronen in die Fadenstrahlröhre und werden auf eine Kreisbahn gezwungen. An einer Spannungsquelle kann die Beschleunigungsspannung der Elektronen und damit ihre kinetische Energie variiert werden. Ebenso kann der Helmholtz-Spulenstrom verändert werden. Innerhalb der Fadenstrahlröhre befinden sich Markierungen, an denen der Radius der Elektronenbahn abgelesen werden kann.

Einige Elektronen aus dem Strahl stoßen auf ihrem Weg mit Gasmolekülen zusammen, regen diese dadurch zum Leuchten an (Stoßionisation), dadurch wird der Elektronenstrahl sichtbar. Der Fadenstrahl ist gerade, wenn keinerlei Kräfte auf die Elektronen wirken.

5.4 Versuchsdurchführung

5.4.1 Messung der Magnetfeldstärke

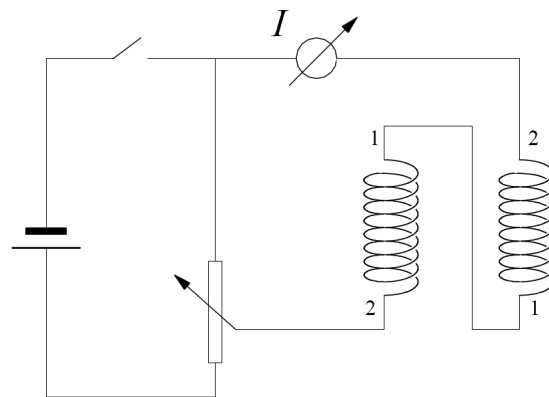


Abbildung 5.4.1: Verschaltung des Helmholtzspulenpaars, 1 und 2 sind die Anschlüsse der Spulen.

Zu Kalibrierungszwecken ist die Funktion $B = f(I)$ für ein Paar Helmholtzspulen zu bestimmen. Dazu wird das homogene Magnetfeld mit einer Hall-Sonde im inneren Bereich des Spulenpaars gemessen ($B[\text{mT}] = 1,044 \cdot U[\text{mV}]$, wobei U die von der Hall-Sonde gemessene Spannung ist). Es soll das Feld der magnetischen Induktion für $I = 0,0 \text{ A}$ bis $3,0 \text{ A}$ in $0,1 \text{ A}$ Schritten gemessen werden.

Die Messung mit der Hall-Sonde soll nur unter Anleitung des Versuchsbetreibers vorgenommen werden! Die Messung kann auch repräsentativ für alle durchgeführt werden.

5.4.2 Bestimmung des Kreisbahnradius

Anschließend wird in dem homogenen Magnetfeld ein Elektronenstrahl erzeugt, welcher auf eine Kreisbahn gezwungen wird. Der Radius dieser Kreisbahn r ist eine Funktion der magne-

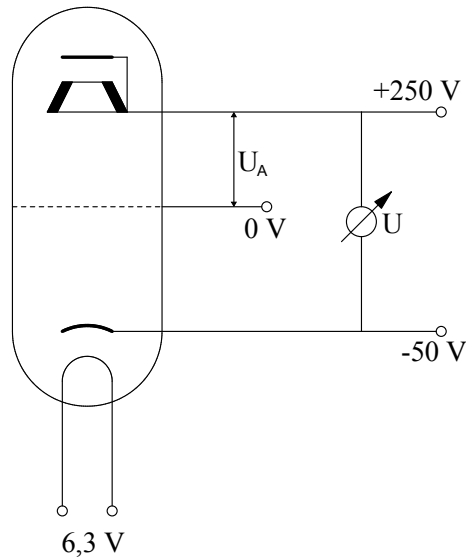


Abbildung 5.4.2: Verschaltung des Fadenstrahlrohrs

tischen Flussdichte, also des Spulenstroms I , und der Beschleunigungsspannung U_A (Abb. 5.4.2).

- Variieren Sie zunächst die Anodenspannung (Beschleunigungsspannung) U_A von 100V bis 190V in 10V Schritten und dann von 190V bis 250V in 20V Schritten. Messen Sie bei jedem Schritt den Strom I für die verschiedenen Radien r .
- Variieren Sie nun den Spulenstrom (und somit die Magnetfeldstärke) I von 1,0 A bis 1,6 A in 0,1 A Schritten und von 1,6 A bis 2,0 A in 0,2 A Schritten. Messen Sie bei jedem Schritt die Spannung U_A für die verschiedenen Radien r .

Der freie Parameter ist jeweils so einzustellen, dass ein scharf gebündelter Elektronenstrahl sichtbar und der Kreisdurchmesser an der Markierung gut abzulesen ist.

5.5 Auswertung

5.5.1 Aufgaben zur Vorbereitung

1. Berechnen Sie vorbereitend die Dimension von $\frac{e}{m}$
2. Wieso ist der Elektronenstrahl sichtbar?
3. Wie können q und m separat gemessen werden?
4. Wie misst man q und m bei Protonen, Myonen, Pionen, etc.?
5. Welche naheliegende physikalische Überlegung führt zu der Schlussfolgerung: Ladung des Elektrons = Ladung des Protons?

6. Wie groß ist die relativistische Massenzunahme eines Elektrons nach Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung von 200 V?

5.5.2 Bestimmung der Magnetfeldstärke

Zunächst muss die Funktion $B = f(I)$ bestimmt werden. Dazu trägt man die gemessene Magnetfeldstärke B gegen die Stromstärke I auf. Man bestimme daraus die Steigung C und das Parameter B_0 der Regressionsgerade; gemäß Gleichung 5.2.7 gilt

$$B(I) = C \cdot I + B_0$$

wobei $C = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu_0 \frac{n}{R}$ ist.

Die gemessene Kurve ist mit dem zuvor zu berechnenden theoretischen Verlauf (Gl. 5.2.7) zu vergleichen.

5.5.3 Berechnung der spezifischen Ladung

Stellt man Gleichung 5.2.5 um, so erhält man

$$U = \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{2} (B \cdot r)^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{2} (C \cdot I \cdot r)^2.$$

Trägt man nun die Spannung U gegen $\frac{1}{2}(C \cdot I \cdot r)^2$ auf, so erhält man mit der Steigung die spezifische Ladung des Elektrons.

Geben Sie mögliche Ursachen und Größenordnungen der Messfehler an, und berechnen Sie den gesamten Messfehler nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

6 Polarisation

6.1 Einführung

Licht ist eine transversale elektromagnetische Welle und kann somit in einer bestimmten Polarisationsrichtung auftreten. Verschiedene Formen der Polarisation werden in diesem Versuch mittels Polarisationsfiltern hergestellt und untersucht. Außerdem wird das Lichtreflexionsverhalten an einer Glasplatte in Abhängigkeit vom Einfallswinkel und der Polarisationsrichtung vermessen.

6.2 Physikalische Grundlagen

6.2.1 Elektromagnetische Wellen

Das sichtbare Licht besteht aus transversalen elektromagnetischen Wellen, bei denen der elektrische und magnetische Feldvektor immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle stehen. Da beide Feldvektoren ebenfalls senkrecht aufeinander stehen und in fester zeitlicher Beziehung sind, reicht eine Betrachtung des elektrischen Feldvektors aus.

Eine allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen im ladungsfreien Raum stellen die ebenen Wellen dar. Das elektrische Feld ist dann von der Form:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (6.2.1)$$

Dabei ist \vec{k} der Wellenvektor mit $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$, c die Lichtgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge. Es ist bei der Behandlung von Wellen einfacher, mit komplexen Zahlen zu rechnen. Das physikalische \vec{E} -Feld ist daher immer als der Realteil der obigen Gleichung gemeint.

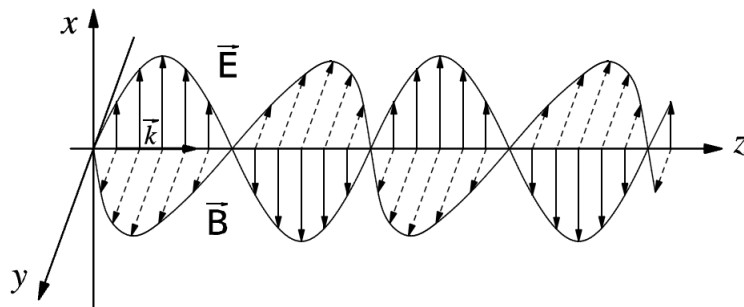


Abbildung 6.2.1: Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in z-Richtung

Die Tatsache, dass die Welle durch die Richtung der Amplitude \vec{E}_0 des elektrischen Feldes eine ausgezeichnete Richtung besitzt, bezeichnet man als *Polarisation*. Aus den Maxwell-Gleichungen kann man leicht zeigen, dass $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$ gelten muss, also die Welle tatsächlich transversal ist. Die möglichen Polarisationsrichtungen stehen daher immer senkrecht zu Ausbreitungsrichtung der Welle, die in den folgenden Beispielen als die z -Richtung gewählt ist. Dann muss \vec{E}_0 in der x - y -Ebene liegen.

Die *Intensität* I des Lichtes ist die Energie, die die Welle pro Zeit und Fläche transportiert, bzw. im Teilchenbild des Lichts die Anzahl der Photonen, die diese Fläche pro Zeit treffen. Sie ist proportional zum Quadrat der Amplitude $|\vec{E}_0|$ der elektrischen Feldstärke:

$$I \sim |\vec{E}_0|^2 \quad (6.2.2)$$

6.2.2 Arten von Polarisation

Im folgenden werden verschiedene Arten von polarisiertem Licht für eine in z -Richtung laufende, ebene Welle $\vec{E}(z, t)$ besprochen:

Lineare Polarisation

Bei linearer Polarisation ist \vec{E}_0 zeitlich konstant, daher schwingt $\vec{E}(z, t)$ in einer Ebene. (Für die in Abb. 6.2.1 gezeigte Welle ist dies z.B. die x - z -Ebene.) Ist diese Ebene um den Winkel ϕ zur x -Achse geneigt, so lässt sich die Welle in zwei Komponenten zerlegen, nämlich die Projektionen auf die x - bzw. y -Achse, d.h. $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t)$. Der elektrische Feldvektor in x - y -Ebene ist dann gegeben durch:

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos \phi \cdot e^{i\omega t} \\ E_0 \sin \phi \cdot e^{i\omega t} \end{pmatrix} \quad (6.2.3)$$

\vec{E} lässt sich somit auffassen als Überlagerung zweier Schwingungen verschiedener Amplituden aber gleicher Frequenz und gleicher Phase.

Elliptische Polarisation

Elliptische Polarisation liegt vor, wenn die beiden Komponenten $\vec{E}_x(z, t)$ und $\vec{E}_y(z, t)$ eine konstante zeitliche Phasendifferenz δ aufweisen:

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cdot e^{i\omega t} \\ E_{0,y} \cdot e^{i(\omega t + \delta)} \end{pmatrix} \quad (6.2.4)$$

Man kann zeigen, dass die Superposition der x - und der y -Komponente dazu führt, dass der Vektor $\vec{E}(z, t)$ auf einer Ellipse umläuft. Dies gilt auch, wenn die $E_{0,x}$ und $E_{0,y}$ gleich sind.

Zirkulare Polarisation

Dies ist ein Spezialfall der elliptischen Polarisation, bei der die Amplituden beider Wellen gleich sind und die Phasendifferenz gerade $\frac{\pi}{2}$ ist. Hierbei dreht sich der Feldvektor kreisförmig um die Ausbreitungsrichtung. Auch bei einer Phasendifferenz von $-\frac{\pi}{2}$ liegt zirkulare Polarisation vor, nur dreht sich der Feldvektor dann im anderen Umlaufsinn.

Licht mit statistisch verteilter Polarisation

Das Licht, das im Alltag auftritt, z.B. von einer Glühbirne, besteht aus vielen kurzen Wellenzügen, von denen jeder in eine zufällige Richtung linear polarisiert ist. Da alle Polarisationsrichtungen gleich wahrscheinlich sind, ist keine Richtung in der Welle ausgezeichnet. Solches Licht kann man als unpolarisiert bezeichnen.

Mit verschiedenen Methoden kann man aus diesem Licht aber polarisiertes Licht herstellen. Dies soll im nächsten Abschnitt genauer besprochen werden.

6.2.3 Erzeugung von polarisiertem Licht

Polarisationsfilter

Polarisationsfolien (auch Polaroidfilter genannt) bestehen aus Kunststoffen, in denen sich bestimmte, große und lange Moleküle befinden, die alle parallel in eine bestimmte Richtung ausgerichtet sind. Dies sorgt dafür, dass in diese Richtung polarisiertes Licht stark absorbiert wird und im wesentlichen nur noch die andere Polarisationskomponente übrig bleibt. Diesen Effekt bezeichnet man als Dichroismus.

Mit einem solchen Filter kann man linear polarisiertes Licht aus natürlichem, unpolarisiertem erzeugen.

Reflexion und Brewster-Winkel

Trifft ein Lichtstrahl auf eine Glasplatte unter dem Einfallswinkel α zu ihrer Flächennormale, so wird ein Teil des Strahls unter dem gleichen Winkel α als Ausfallswinkel reflektiert. Der restliche Teil wird durch die Platte transmittiert und nach dem *Snelliusschen Brechungsgesetz* unter dem Winkel β mit

$$n_{\text{Glas}} \sin \beta = n_{\text{Luft}} \sin \alpha$$

gebrochen. In diesem Versuch ist $n_{\text{Glas}} = 1,52$ und $n_{\text{Luft}} \simeq 1$.

Man stellt nun fest, dass unterschiedliche Anteile des Lichtes gebrochen bzw. reflektiert werden. Wie groß diese Anteile sind, hängt vom Einfallswinkel α und insbesondere auch von der Polarisationsrichtung des einfallenden Strahls ab.

Bevor die dies beschreibenden Gesetze angegeben werden, müssen noch einige Bezeichnungen definiert werden: Durch den ein- und ausfallenden Strahl wird eine Ebene aufgespannt, die so genannte *Einfallsebene*. Man betrachtet nun den Amplitudenvektor \vec{E}_0 des elektrischen Feldes der Lichtstrahlen und teilt ihn in eine Komponente E_{\parallel} parallel und E_{\perp} senkrecht zur Einfallsebene auf. Außerdem wird für den einfallenden Strahl die Bezeichnung E_e , für den reflektierten E_r und für den gebrochenen E_g benutzt. Das Verhältnis der beiden Brechzahlen

wird als $n_{rel} = \frac{n_{Glas}}{n_{Luft}}$ bezeichnet.

Aus den Maxwellgleichungen in Materie kann man die Stärke von E_{\parallel} und E_{\perp} nach Brechung bzw. Beugung berechnen. Dies sind die *Fresnelschen Formeln*:

$$\rho_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}} = \frac{\left(\sqrt{n_{rel}^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha\right)^2}{n_{rel}^2 - 1} \quad (6.2.5)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{E_{g\perp}}{E_{e\perp}} = \frac{2 \cos \alpha \left(\sqrt{n_{rel}^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha\right)}{n_{rel}^2 - 1} \quad (6.2.6)$$

$$\rho_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{e\parallel}} = \frac{n_{rel}^2 \cos \alpha - \sqrt{n_{rel}^2 - \sin^2 \alpha}}{n_{rel}^2 \cos \alpha + \sqrt{n_{rel}^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (6.2.7)$$

$$\sigma_{\parallel} = \frac{E_{g\parallel}}{E_{e\parallel}} = \frac{2 n_{rel} \cos \alpha}{n_{rel}^2 \cos \alpha + \sqrt{n_{rel}^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (6.2.8)$$

$$(6.2.9)$$

Die oben definierten Reflexionskoeffizienten ρ_{\perp} und ρ_{\parallel} geben das Verhältnis der elektrischen Feldstärke von aus- und einfallendem reflektiertem Strahl an. (σ_{\perp} und σ_{\parallel} entsprechend für den gebrochenen.) Da für die Intensität I des Lichts $I \sim |E|^2$ gilt, erhält man den *Reflexionsgrad*

$$R_{\perp/\parallel} = \frac{I_{r\perp/\parallel}}{I_{e\perp/\parallel}} = \left(\frac{E_{r\perp/\parallel}}{E_{e\perp/\parallel}}\right)^2 \quad (6.2.10)$$

Die Kurve für den Reflexionskoeffizienten ρ_{\parallel} bei Polarisation parallel zur Einfallsebene hat eine Nullstelle bei $\alpha_B = \arctan(n_{rel}) \simeq 56,8^\circ$ (bei Glas), dem so genannten *Brewster-Winkel*, bei dem reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen. Unter diesem Winkel wird Licht dieser Polarisation vollständig gebrochen und kein Anteil reflektiert.

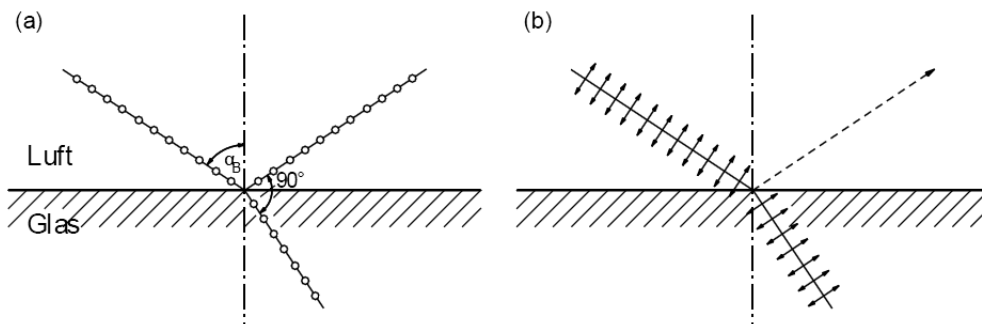


Abbildung 6.2.2: Reflexion und Brechung von (a) senkrecht und (b) parallel polarisiertem Licht unter dem Brewster-Winkel α_B

$\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen

Elliptisch polarisiertes Licht wird aus linear polarisiertem durch ein so genanntes $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen erzeugt. In diesem Plättchen hat das Licht eine von der Polarisationsrichtung abhängige Geschwindigkeit. Die Richtungen mit Maximalwert c_{max} und Minimalwert c_{min} der Geschwindigkeit stehen senkrecht aufeinander. Durchläuft linear polarisiertes Licht das Plättchen, so benötigt die in c_{max} -Richtung polarisierte Komponente weniger Zeit, um es zu durchqueren, als die in c_{min} . Das Plättchen ist gerade so dick, dass Licht einer bestimmten, vorgegebenen Wellenlänge λ nach dem Durchlaufen eine Phasendifferenz von $\pi/2$ im Vergleich zur anderen erhalten hat (diese entspricht gerade einem Viertel der Wellenlänge).

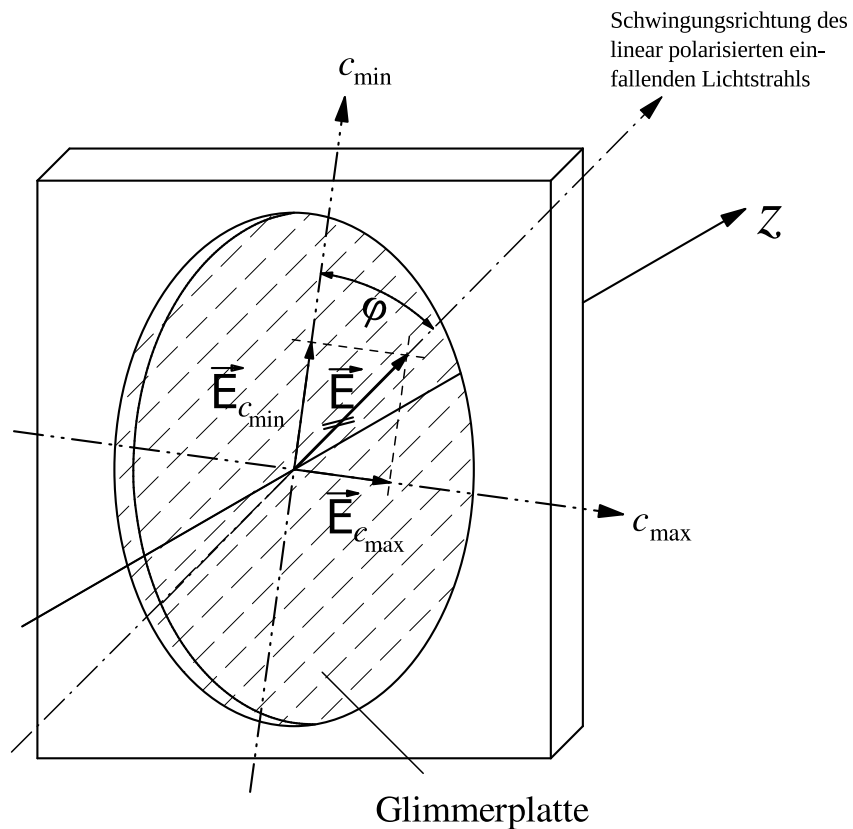


Abbildung 6.2.3: $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen (das in diesem Versuch verwendete besteht aus Glimmer)

6.2.4 Photomultiplier

Der Sekundärelektronen-Vervielfacher oder Photomultiplier ist im Prinzip eine Photozelle, in der Licht durch den Photoeffekt freie Elektronen erzeugt. Diese gelangen jedoch nicht auf direktem Wege zur Anode, sondern werden durch elektrische Felder gegen Parallelelektroden, die Dynoden, gelenkt. Dabei entstehen Sekundärelektronen, die dann auf der nächsten Dynode die Zahl der Ladungsträger weiter erhöhen usw. Aus einem Photoelektron, welches

die Photokathode verlässt, werden so $10^5 \dots 10^9$ Elektronen an der Anode. Es wird damit Strom erzeugt, der proportional zur Intensität des einfallenden Lichts ist. Die Verstärkung reicht aus, um auch noch kleinste Lichtmengen messen zu können.

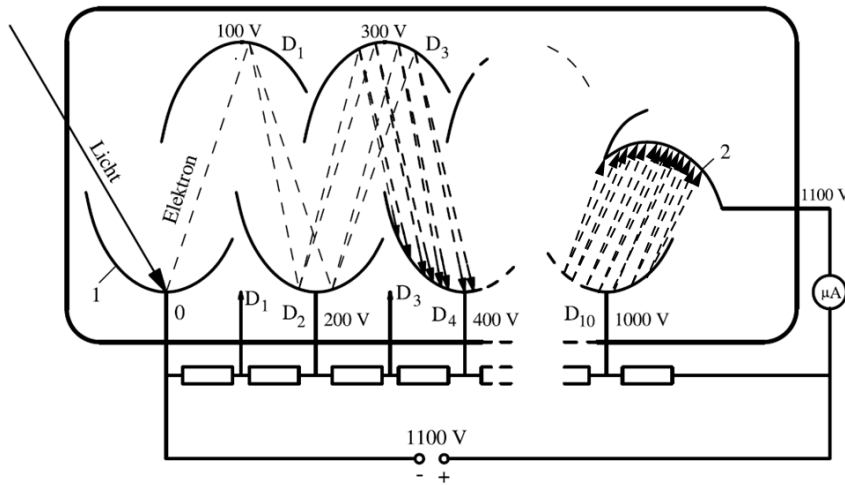


Abbildung 6.2.4: Prinzipskizze eines Photomultipliers. Das Licht erzeugt Elektronen, die durch eine Spannungsdifferenz zu den Dynoden D_i beschleunigt werden und dort in einer Kaskade jeweils immer mehr Elektronen ausschlagen. Hier ist das Durchlaufen der Kaskade bis zur vierten Dynode D_4 gezeigt. Am Ende treffen die vervielfachten Elektronen auf die Anode und erzeugen so einen verstärkten Strom.

6.3 Versuchsaufbau

Man verwendet einen Versuchstisch, an dem zwei um die senkrechte Zentrumsachse des Tisches drehbare Fernrohre angebracht sind (siehe Abb. 6.3.1). Diese Fernrohre können für den ersten Versuchsteil in genau gegenüberliegenden Positionen eingerastet werden und für den zweiten Versuchsteil in einen beliebigen, an einer Skala ablesbaren Winkel zueinander gebracht werden. An ihren dem Tisch zugewandten Enden befinden sich die drehbaren, ebenfalls mit einer Winkelskala versehenen Polarisationsfilter. Der an der Lichtquelle befindliche wird *Polarisator* genannt, der am Empfängerrohr *Analysator*.

Am anderen Ende des einen Fernrohres befindet sich die Lichtquelle, deren Licht dadurch zu einem parallelen Strahl gebündelt wird und durch den Polarisator läuft. Das andere Fernrohr bündelt das hinter dem Analysator empfangene Licht wieder und ist mit einem Photomultiplier ausgerüstet, um dessen Intensität zu messen.

Vor dem Analysator kann schließlich noch ein grüner Farbfilter zur Erzeugung einfarbigen Lichts aufgesetzt werden und es steht ein $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen und eine Glasplatte zur Verfügung, die in der Mitte des Tisches befestigt werden können.

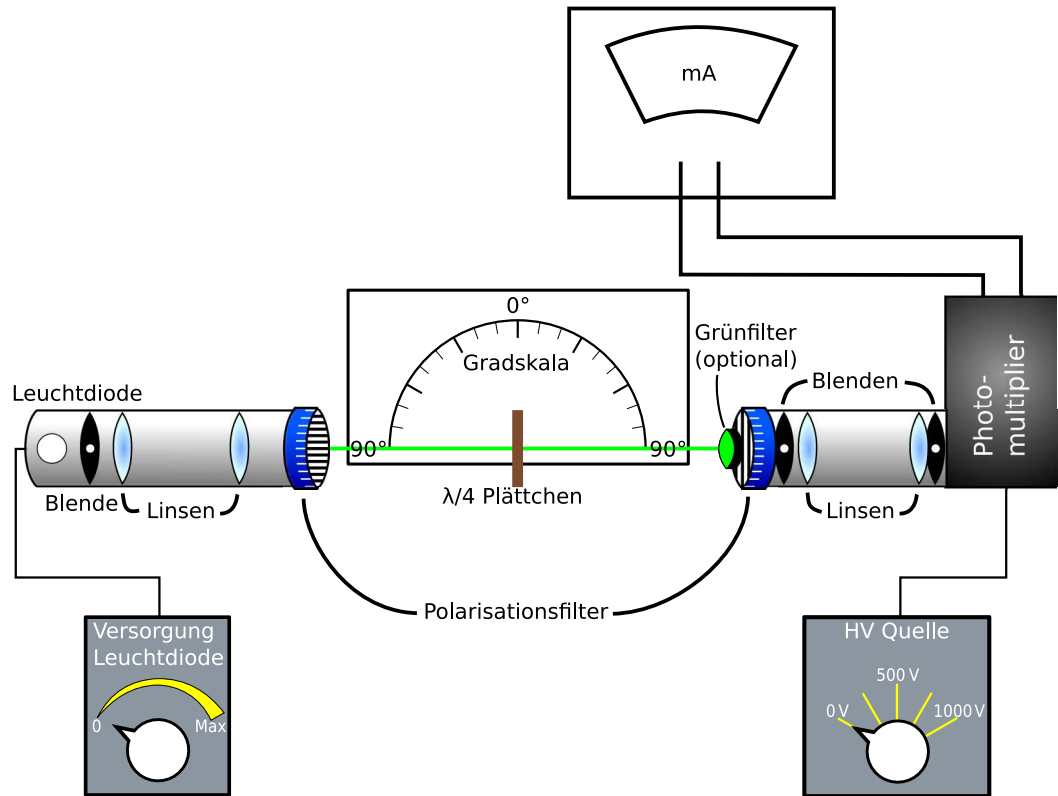


Abbildung 6.3.1: Schematischer Aufbau der Messanordnung

6.4 Versuchsdurchführung

6.4.1 Versuchsvorbereitung

Das Licht wird in diesem Versuch durch eine Leuchtdiode erzeugt, die in einem Gehäuse mit dem Beleuchtungsfernrohr verbunden ist. Die Beleuchtungsstärke kann durch ein Potentiometer geregelt werden.

Der Photomultiplier wird mit einer Hochspannung (HV für „high voltage“) betrieben und erzeugt einen schwachen Strom, der proportional zur Lichtintensität ist. Dieser darf *auf keinen Fall* 1 mA *übersteigen*, da sonst der Photomultiplier beschädigt wird.

Nehmen Sie, um dies zu gewährleisten, die Versuchsanordnung in folgender Reihenfolge in Betrieb:

- Stellen Sie Beleuchtungs- und Empfängerrohr in die gegenüberliegende Position und stellen Sie sicher, dass der Grünfilter abgenommen ist.
- Schließen Sie den Beleuchter an sein Stromversorgungs-Netzteil an, aber schalten Sie ihn noch nicht ein (d.h. der Regler ist auf 0 gestellt).

- Schließen Sie den Photomultiplier an seine Hochspannungsversorgung an (Buchse „HV“). (Die beiden Buchsen „Monitor“ dienen nur zu Wartungszwecken und werden hier nicht benötigt.) Schließen Sie anschließend das Strommessgerät an den Photomultiplier an und stellen es auf 1 mA.
- Schalten Sie die Hochspannungsversorgung ein und stellen Sie den Regler auf 1000 V.
- In diesem Versuch ist stets der Einfluss des Umgebungslichts von den erhaltenen Messwerten für den Photostrom abzuziehen. Messen Sie zuerst dessen Intensität bei noch ausgeschalteter Lampe. Untersuchen Sie auch, ob das Aufsetzen des Grünfilters diesen Wert verändert und nehmen Sie ihn danach wieder ab.
- Drehen Sie nun den Regler für die Beleuchtung ein wenig hoch, damit ein schwaches Licht erzeugt wird.
- Beobachten Sie den angezeigten Strom des Photomultipliers. Verdrehen Sie nun langsam Polarisator und Analysator so lange, bis Sie die Einstellung gefunden haben, in der der Strom maximal wird, also beide Polarisationsfilter in die gleiche Polarisationsrichtung eingestellt sind.
- Behalten Sie diese Einstellung bei und erhöhen Sie nun die Stärke der Beleuchtung auf einen ausreichend hohen Wert, aber so, dass der Photostrom noch genug von 1 mA entfernt ist (also z.B. bis zu 500 μA).
- Setzen Sie schließlich noch den Grünfilter auf den Analysator, damit Licht einer einheitlichen Wellenlänge untersucht wird. (Dies ist vor allem für das $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen wichtig.) Nun können Sie mit den Messaufgaben beginnen.

6.4.2 Messaufgabe 1: Linear polarisiertes Licht

Vom Polarisator wird linear polarisiertes Licht in einer bestimmten Ebene erzeugt. Ist die Analysatorrichtung um den relativen Winkel ϕ gegenüber dieser Schwingungsrichtung gedreht, so wird vom elektrischen Feldvektor \vec{E} nur die Projektion $|\vec{E}| \cos \phi$ vom Analysator durchgelassen. (Hinter dem Analysator schwingt das Licht in der Polarisationssebene der Analysators). Messen Sie nun den Strom des Photomultipliers in Abhängigkeit des Relativwinkels ϕ . Dabei soll die Weite der Messschritte (z.B. 5°) der Veränderung des gemessenen Stroms angepasst werden. Sie brauchen nur einen Winkelbereich der Größe 180° zu vermessen, da der andere Bereich dazu symmetrisch ist.

6.4.3 Messaufgabe 2: Elliptisch polarisiertes Licht

Zur Herstellung von elliptisch polarisiertem Licht stellen Sie das Dia mit dem $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen senkrecht zum Strahlengang in die Mitte des Versuchstischs. Je nachdem, unter welcher Polarisationsrichtung das linear polarisierte Licht in Relation zu den Achsen von c_{min} und c_{max} auf das Plättchen trifft, entstehen unterschiedliche Ausprägungen von elliptisch polarisiertem

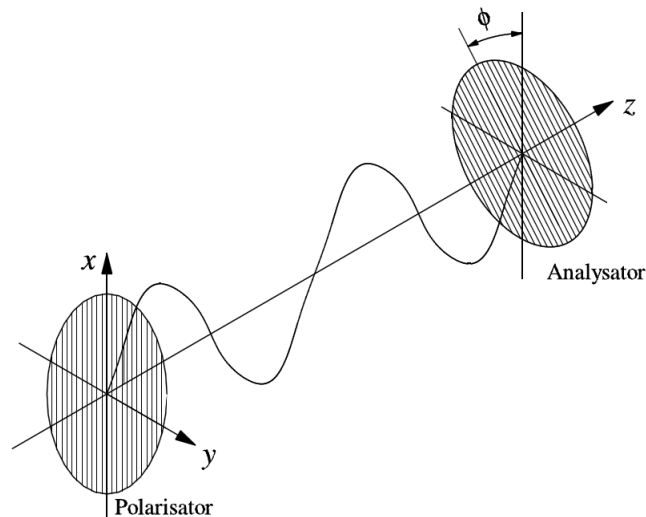


Abbildung 6.4.1: Polarisator und Analysator.

Licht. (Siehe auch Abb. 6.2.3)

Geben Sie an, wie die Richtungen dieser Achsen zu erkennen sind und stellen Sie diese durch Drehen der Polarisationsfilter und Beobachten der erhaltenen Polarisation fest. Stellen Sie elliptisch polarisiertes Licht her, indem Sie \vec{E} einmal unter 15° und einmal unter 30° zu einer der c -Achsen einfallen lassen. Messen Sie dann für diese beiden Fälle genau wie im vorherigen Versuchsschritt die Lichtintensität für verschiedene Winkel ϕ des Analysators.

6.4.4 Messaufgabe 3: Messung der Reflexion an der Glasplatte

Zur Messung der Reflexion an der Glasplatte ist die Messanordnung wie in Abbildung 6.4.2 gezeigt umzustellen. Stellen Sie die Glasplatte in die Mitte und nehmen Sie den Grünfilter vom Analysator ab. Die Polarisationsrichtung des Polarisators und des Analysators sind zuerst senkrecht zur Einfallsebene einzustellen.

Messen Sie den Photostrom I in Abhängigkeit vom Winkel α in 5° -Schritten und führen Sie dann die gleiche Messung für parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht durch. Bei jedem Schritt müssen Sie Polarisator und Analysator so positionieren, dass Einfallswinkel gleich sind. Stehen sich die beiden Fernrohre bei $\alpha = 90^\circ$ ohne Glasscheibe gegenüber, so erhält man den Maximalwert I_{max} , der zur Intensität des einfallenden Lichtstrahls proportional ist.

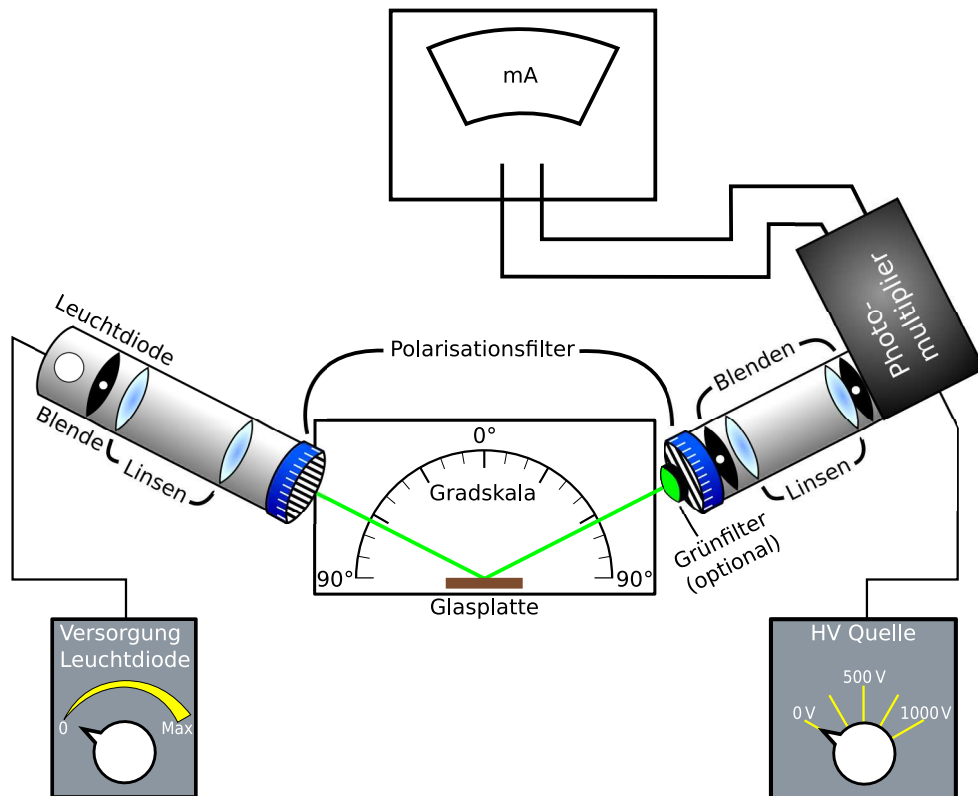


Abbildung 6.4.2: Messanordnung für die Messung der Reflexion

6.5 Aufgaben zur Auswertung

6.5.1 Linear polarisiertes Licht

Hinweis zur Ergebnisdarstellung: ein Diagramm im Polarkoordinatensystem.

Die gemessenen Werte für den Strom I bei verschiedenen Winkeln ϕ sind proportional zur Intensität des Lichts. Der größte erhaltene Wert für den Strom I_{max} stellt daher die maximale Intensität dar.

Tragen Sie nun $\sqrt{\frac{I}{I_{max}}}$ auf polarem Millimeterpapier gegen ϕ auf. (Dies erhalten Sie vom Praktikumsbetreuer oder Sie können es von der Vorlage aus Abb. 6.5.1 kopieren.) Da die Intensität des Lichts proportional zum Quadrat der Feldstärke ist, ergibt sich damit wie oben schon erwähnt ein Maß für die elektrische Feldstärke $\frac{E}{E_{max}}$ hinter dem Polarisator.

6.5.2 Elliptisch polarisiertes Licht

Hinweis zur Ergebnisdarstellung: zwei Diagramme im Polarkoordinatensystem.

Tragen Sie auch hier die gemessenen Werte für $\phi = 15^\circ$ und $\phi = 30^\circ$ jeweils auf polarem

Millimeterpapier auf und diskutieren Sie kurz das Ergebnis der bisherigen Messungen.

6.5.3 Messung der Reflexion an der Glasplatte

Hinweis zur Ergebnisdarstellung: zwei Kurven in einem Diagramm im orthogonalen Koordinatensystem.

Der gemessene Strom I ist ein Maß für den Intensität des reflektierten Lichts. Tragen Sie in einem Diagramm ρ_{\perp} und ρ_{\parallel} mit $\rho_{\perp/\parallel} = \sqrt{\frac{I_{\perp/\parallel}}{I_{max\ \perp/\parallel}}} = \frac{E_{r\ \perp/\parallel}}{E_{e\ \perp/\parallel}}$ gegen den Einfallswinkel α auf. Zeichnen Sie die theoretische Kurve ein und vergleichen Sie sie mit den Messwerten.

6.6 Kontrollfragen zur Vorbereitung

1. Zeigen Sie, dass die Kurve $|\vec{E}(\phi)|$ bei linearer Polarisation ein Kreis ist, wenn man sie in Polarkoordinaten zeichnet.
2. Rechnen Sie die Gleichung der Ellipse aus, auf der E bei elliptischer Polarisation umläuft. Warum erhalten Sie bei der Darstellung von E/E_{max} auf polarem Millimeterpapier keine Ellipsen?
3. Schätzen Sie die Zeitauflösung der Messanordnung grob ab, indem Sie das Messinstrument bei plötzlichen Änderungen beobachten. Wie oft läuft \vec{E} innerhalb dieser kürzesten Messzeit auf einer Ellipse bzw. einem Kreis um? (Dies zeigt, dass die Drehung der Polarisationsachse hier natürlich unmöglich direkt beobachtet werden kann.)
4. Zeigen Sie dass ein $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen folgende Dicke d hat:

$$d = \frac{\lambda}{4 \left(\frac{c}{c_{min}} - \frac{c}{c_{max}} \right)} = \frac{\lambda}{4 (n_{min} - n_{max})} \quad (6.6.1)$$

5. Versuchen Sie, den Strahlengang im Beleuchtungs- und im Beobachtungsrohr zu zeichnen und diskutieren Sie ihn. Warum braucht man zwei Linsen auf jeder Seite?

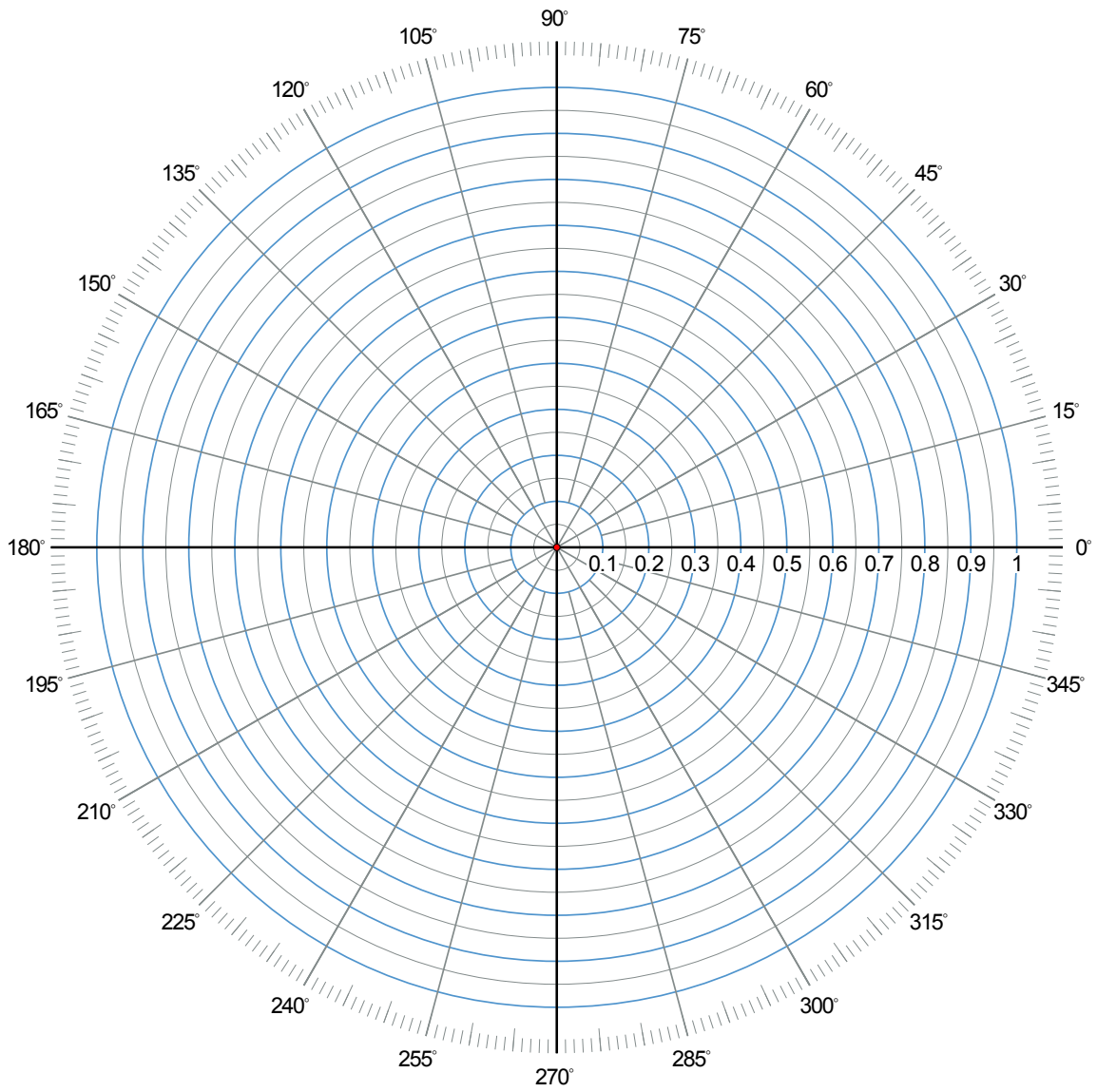


Abbildung 6.5.1: Polardiagramm