Übungen zur Physik für Chemiker II SoSe 21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 12 Lösung

Ausgabe: Mi, 07.07.2021

Aufgabe 1.
Man lege an einen Plattenkondensator mit runden Platten mit Radius R_0 und Plattenabstand d eine hochfrequente Wechselspannung $U_C = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ an. Dadurch erhält man einen Verschiebungsstrom, welcher zudem ein Magnetfeld erzeugt. Durch eine kleine Induktionsspule mit N Windungen und dem Flächennormalenvektor $\mathbf{A}$ parallel zum Magnetfeld kann man nun den magnetischen Fluss am Rande des Kondensators im Abstand R_0 bestimmen und dadurch die induzierte Wechselspannung und deren Amplitude berechnen.
Somit hat man den Verschiebungsstrom experimentell nachgewiesen.
Es sei $A = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, $\quad N = 10^3$, $\quad R_0 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $\quad U_0 = 100\,\mathrm{V}$, $\quad \omega = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^6/\mathrm{s}$, $\quad d = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

Bestimmen Sie den Verschiebungsstrom und das Magnetfeld im Kondensator und den magnetischen Fluss und die induzierte Wechselspannung in der Spule.

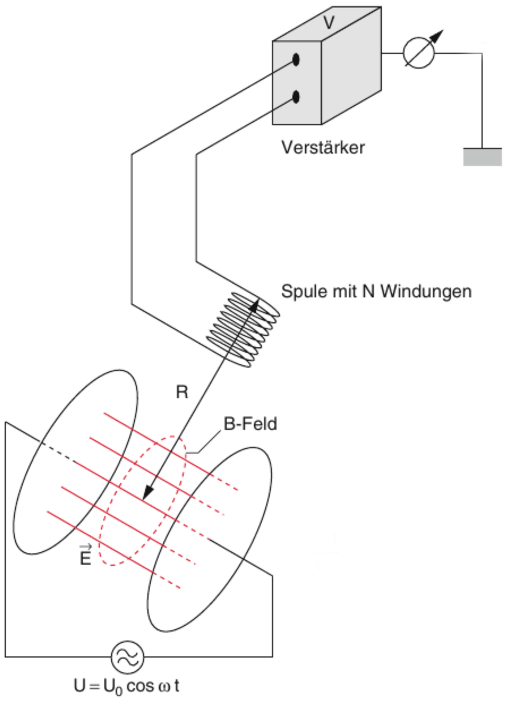

Abbildung 1: Skizze von Aufgabe 1.

Lösung 1.
Es ist $U_C = U_0 \cdot \cos(\omega t)$. Der Strom ist definiert als die zeitliche Änderung der Ladung, also:

$$I_V = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Wir wissen, dass bei einem Kondensator $Q = C \cdot U$ ist.
Dies eingesetzt, ergibt:

$$I_V = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C \cdot U_C\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t)\right)$$

Da C zeitlich konstant ist, müssen wir nur die zeitliche Änderung der Spannung betrachten. Weiter wissen wir, dass die Kapazität eines Plattenkondensators mit runden Platten

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{\pi R_0^2}{d} = 11 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}$$

ist. Daraus folgt für den Verschiebungsstrom:

$$\begin{aligned} I_V &= C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_0 \cdot \cos(\omega t)\right) \\ &= -C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \\ &= -\epsilon_0 \cdot \frac{\pi R_0^2}{d} \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Das Magnetfeld am Rande des Kondensators im Abstand R_0 von der Achse ist:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_V}{2\pi R_0}$$

Der magnetische Fluss ist gegeben durch

$$\Phi_m = N \cdot A \cdot B$$

Daraus folgt:

$$\Phi_m = \frac{N \cdot A \cdot \mu_0 \cdot I_V}{2\pi R_0}$$

Die induzierte Wechselspannung, also die negative zeitliche Änderung des Flusses, berechnet sich zu

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{ind}} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} \\ &= -N \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi R_0} N \cdot A \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}^2 U_C}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi R_0} N \cdot A \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\pi R_0^2}{d} \cdot U_0 \cos(\omega t) \omega^2 U_0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Amplitude der induzierten Spannung:

$$U_{\mathrm{ind}}^{\mathrm{max}} = \frac{\mu_0}{2\pi R_0} N \cdot A \cdot C \cdot U_0 \cdot \omega^2 = 4{,}8\,\mathrm{mV}$$

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass die planare, linear polarisierte Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \sin(\omega t)\sin(kz)\vec{e}_x$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = B_0 \cos(\omega t)\cos(kz)\vec{e}_y$$

die Maxwell Gleichungen erfüllen.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $B_0 = E_0/c$.

Lösung 2.
Die Maxwell Gleichungen lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Berechnen wir nun $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_0 \sin(\omega t)\sin(kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \partial_x \cdot E_0 \sin(\omega t)\sin(kz) \\ &= 0\end{aligned}$$

Berechnen wir weiter $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \cos(\omega t)\cos(kz) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \partial_y \cdot B_0 \cos(\omega t)\cos(kz) \\ &= 0\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die linke Seite von $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0 \sin(\omega t)\sin(kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z E_0 \sin(\omega t)\sin(kz) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 k \sin(\omega t)\cos(kz) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nun die linke Seite:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} 0 \\ B_0\cos(\omega t)\cos(kz) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ B_0\omega\sin(\omega t)\cos(kz) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nun nutzen wir den Hinweis, dass $B_0 = E_0/c$ ist. Daraus folgt (mit $\omega = k \cdot c$):

$$B_0 \cdot \omega = E_0 \cdot k$$

Und somit ist $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.
Nun betrachten wir $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B_0\cos(\omega t)\cos(kz) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\partial_z B_0\cos(\omega t)\cos(kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_0 k\cos(\omega t)\sin(kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Berechnen wir noch $\frac{\partial E}{\partial t}$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E_0\omega\cos(\omega t)\sin(kz)\vec{e}_x$$

Mit selbigem Trick wie oben, gilt:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{E_0}{c} \\
\Leftrightarrow E_0 &= B_0 \cdot c \\
\Rightarrow E_0 \cdot \omega &= B_0 c\omega = B_0 k c^2 = B_0 k\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt direkt $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$