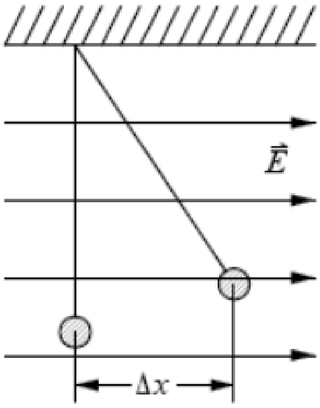
Übungen zur Physik für Chemiker II SoSe 21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 2 Lösung

Ausgabe: Mi, 28.04.2021

Aufgabe 1.
Ein graphitüberzogener Tischtennisball der Masse $m = 2{,}5\,\mathrm{g}$ hängt an einem Faden der Länge $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$. Er hat die Ladung $q = 1{,}3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$. In einem waagerecht verlaufenden homogenen elektrischen Feld wird die Kugel um $\Delta x = 8\,\mathrm{cm}$ in horizontaler Richtung aus der Ruhelage ausgelenkt.
Berechnen Sie den Betrag der Feldstärke E des äußeren homogenen Feldes.



Lösung 1.
Betrachtet man die Kräfte, so kann man, wie in Abb. 1 zu sehen, die Kräfte skizzieren und mit den geometrischen Formeln die Lösung ermitteln.

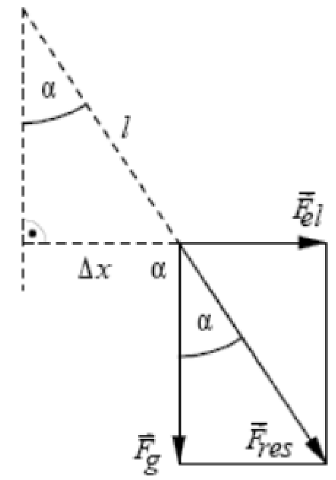


Abbildung 1: Fadenpendel im elektrischen Feld

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= l \cdot \sin(\alpha) \\
\sin(\alpha) &= \frac{\Delta x}{l} \\
\alpha &= \arcsin\left(\frac{\Delta x}{l}\right) \\
\tan(\alpha) &= \frac{F_{el}}{F_G} = \frac{q \cdot E}{m \cdot g} \\
\Rightarrow E = \frac{m \cdot g \tan(\alpha)}{q} &= \frac{m \cdot g \cdot \tan(\arcsin(\frac{\Delta x}{l}))}{q} \\
E &= 1{,}3 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.
Auf einer nicht-leitfähigen Kugel mit Radius r_0 sei die Ladung Q homogen verteilt. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Satzes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{eingeschl.}}}{\epsilon_0}$$

das elektrische Feld

(a) außerhalb der Kugel

(b) innerhalb der Kugel

Tragen Sie anschließend den Betrag des elektrischen Feldes E gegen den Radius r auf

Lösung 2.

In einer Kugel aus Metall ist die Ladung homogen verteilt. Aus Symmetriegründen hängt E somit nur von r und nicht etwa von den Azimut- und Polarwinkel Θ, ϕ ab.

(a) Als geschlossene Fläche für die Anwendung des Gaußschen Satzes wählen wir eine Kugel mit Radius $r > r_0$. Da E nur von r abhängt und die Eingeschlossene Ladung die Gesamtladung ($Q_{eingeschl} = Q$) ist, folgt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r > r_0)$$

Wobei $(4\pi r^2)$ die Oberfläche der Gauß-Kugel ist. Es fällt auf, dass das Feld außerhalb der Kugel gleich dem einer Punktladung mit Ladung Q am Ort des Zentrums der Kugel ist.

(b) Im inneren der Kugel wählen wir eine konzentrische Kugel mit Radius $r < r_0$. Aus Gründen der Symmetrie verläuft auch hier das E-Feld radial, also senkrecht durch die Kugeloberfläche. Somit erhalten wir:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2)$$

Die eingeschlossene Ladung ist nun ein Teil der Gesamtladung abhängig vom Radius. Die Ladungsdichte ρ beschreibt die Ladung pro Volumen. Bei einer homogen geladenen Kugel ist die Ladungsdichte für die gesamte Kugel konstant. Der Anteil der Ladung von der Gesamtladung Q, der von einer Kugel mit Radius r eingeschlossen ist, entspricht somit dem Verhältnis des eingeschlossenen Volumens zum Gesamtvolumen (aber nur, wenn die Ladungsdichte konstant ist !). Oder anders:

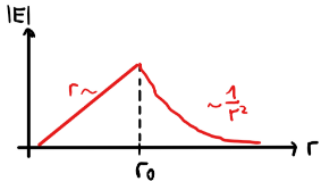
$$Q_{eingeschl} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho} \right) Q = \frac{r^3}{r_0^3} Q$$

In den Gaußschen Satz eingesetzt erhält man so für das E-Feld innerhalb der Kugel:

$$E(4\pi r^2) = \frac{r^3}{r_0^3} \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^3} r \qquad (r < r_0)$$

Das Feld wächst also bis $r = r_0$ linear an und fällt dann mit $1/r^2$ ab.



Aufgabe 3.
Gegeben sei das elektrische Feld $\vec{E}$:

$$\vec{E} = ax\vec{e}_x + ay\vec{e}_y + az\vec{e}_z$$

und eine Kugel mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Verifizieren Sie den Gaußschen Satz, indem Sie beide Seiten explizit ausrechnen:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{V(A)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

Dabei ist die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.
Hinweis: Berechnen Sie das Flächenintegral in Kugelkoordinaten, dann zeigt das Flächenelement $d\vec{A}$ in Richtung des radialen Einheitsvektors.

Lösung 3.
Die Divergenz von V ist:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = a + a + a = 3a$$

Damit wird die rechte Seite des Gaußschen Satzes zu:

$$\int_{V(A)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = 3a \int_{r \leq R} d^3 r = 3a \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi a R^3$$

Für das Flächenintegral auf der linken Seite ist es sinnvoll Kugelkoordinaten zu verwenden. Dabei wird als einschließende Fläche die Kugeloberfläche mit $(r = R)$ verwendet.

$$\begin{aligned}
d\vec{A} &= R^2 d\cos(\Theta) d\phi \vec{e}_r \\
\vec{e}_r \cdot \vec{E} &= \begin{pmatrix} \sin(\Theta)\cos(\phi) \\ \sin(\Theta)\sin(\phi) \\ \cos(\Theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} aR\sin(\Theta)\cos(\phi) \\ aR\sin(\Theta)\sin(\phi) \\ aR\cos(\Theta) \end{pmatrix} \\
&= R(a\sin^2(\Theta)\cos^2(\phi) + a\sin^2(\Theta)\sin^2(\phi) + a\cos^2(\Theta)) \\
&= R(a\sin^2(\Theta) \cdot 1 + a\cos^2(\Theta)) \\
&= Ra
\end{aligned}$$

In das Integral eingesetzt folgt damit:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = R^2(Ra) \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\cos(\Theta) = R^2(Ra)(1 - (-1)) \int_0^{2\pi} d\phi = R^2(Ra) \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi a R^3$$

Damit ist die Gleichheit in diesem speziellen Fall gezeigt.