Übungen zur Physik für Chemiker II SoSe 21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 3 Lösung

Ausgabe: Mi, 05.05.2021

Aufgabe 1.
In einem Plattenkondensator mit Abstand $d = 5\,\text{mm}$ wird durch einen Zerstäuber ein kleines Öltröpfchen vom Radius $r = 4 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ eingebracht. Durch das Zerstäuben wird das Tröpfchen geringfügig positiv geladen. Bei einer Kondensatorspannung schwebt das Tröpfchen im Kondensator. Die Dichte des Öls beträgt $\rho = 0{,}9\,\text{g/cm}^3$ und das E-Feld hat den Betrag $E = 1{,}36 \cdot 10^4\,\text{N/C}$

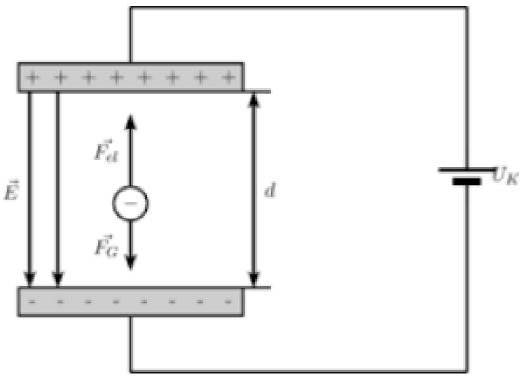


Abbildung 1: F_{el} zeigt nach oben, F_G nach unten.

(a) Bestimmen Sie die Masse des Öltröpfchens.

(b) Berechnen Sie die Ladung des Öltröpfchens

Lösung 1.
(a)

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
m &= V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \\
&= \frac{4}{3} \cdot (4 \cdot 10^{-7}\,\text{m})^3 \cdot \pi \cdot 900\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} \\
\Rightarrow m &= 2{,}4 \cdot 10^{-16}\,\text{kg}
\end{aligned}
$$

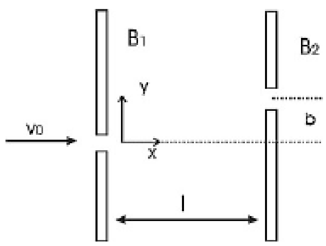
(b)

$$\begin{aligned}
F_G &= F_{el} \\
mg &= E \cdot q \\
q &= \frac{mg}{E} \\
&= \frac{2{,}4 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{N/kg}}{1{,}36 \cdot 10^{4}\,\mathrm{N/C}} \\
\Rightarrow q &= 1{,}7 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Zweifach positiv geladene Ionen der Masse $m = 1{,}5 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 1{,}64 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s}$ durch die Blende B_1 und treten nach der Länge $l = 50\,\mathrm{mm}$ bei der Blende B_2, die um $b = 12\,\mathrm{mm}$ versetzt ist, wieder aus. Zwischen den Blenden herrscht ein homogenes elektrisches Feld in y-Richtung.

(a) Berechnen Sie die Zeit, die die Ionen für die Strecke von B_1 nach B_2 brauchen.

(b) Berechnen Sie den Betrag der elektrischen Feldstärke E.



Lösung 2.
(a)

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{l}{t} \\
\Leftrightarrow t &= \frac{l}{v_0} = 3{,}05 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

(b) In y-Richtung wirkt auf die Ionen eine konstante Kraft. Sie bewegen sich gleichmäßig beschleunigt.

$$\begin{aligned}
b &= \frac{a}{2}t^2 \\
F &= m \cdot a \\
E &= \frac{F}{Q}
\end{aligned}$$

Mit diesen Formeln kann man durch Umstellen und Einsetzen das E-Feld bestimmen.

$$
\begin{aligned}
ma &= EQ \\
\Leftrightarrow a &= \frac{EQ}{m} \\
\Rightarrow b &= \frac{EQ}{2m}t^2 \\
\Leftrightarrow E &= \frac{2bm}{Qt^2} \\
\Rightarrow E &= 12{,}09 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.
Gegeben sei eine homogen geladene Kugel mit dem Radius R, und der Gesamtladung q.

(a) Berechnen Sie nach der Beziehung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV$$

das Potential der Ladungsverteilung in einem Punkt P, der vom Kugelmittelpunkt den Abstand r hat. Diskutieren Sie die Fälle $r \leq R$ und $r > R$.

(b) Bestimmen Sie $\vec{E}$ im Punkt P. Verwenden Sie dazu Ihre Ergebnisse aus (a).

Lösung 3.
(a) Man legt das Koordinatensystem so, dass $\vec{e}_z$ in Richtung von $\vec{r}$ liegt, und benutze zur Integration Kugelkoordinaten (r', θ', ϕ'). Dann gilt:

$$|\vec{r}-\vec{r'}| = \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos(\theta')}$$

Nach der Integration über ϕ' und $\cos(\theta')$ erhält man

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 r}\int_0^R r'\left(|r-r'| - (r+r')\right)dr'$$

dabei ist $\rho_0 = \frac{3q}{4\pi R^3}$ die Ladungsdichte der Kugel. Wegen der Betragsfunktion muss man hier eine Fallunterscheidung vornehmen. Für $r \leq R$ liegt P innerhalb des Integrationsbereichs $0 \leq r' \leq R$. Man muss den Integrationsbereich aufteilen in $0 \leq r' \leq r$ mit $|r-r'| = r-r'$ bzw. $r \leq r' \leq R$ mit $|r-r'| = r'-r$. Für $r > R$ liegt P außerhalb des Integrationsbereichs, d.h. $r > r'$. Die r' Integration liefert

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases} \frac{3R^2-r^2}{2R^3} & \text{für} \quad 0 \leq r \leq R \\ \frac{1}{r} & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

(b) Da $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$, liefert der Gradient in Kugelkoordinaten das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r$, also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{e}_r\begin{cases} \frac{r}{R^3} & \text{für} \quad 0 \leq r \leq R \\ \frac{1}{r^2} & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

Aufgabe 4.
Zwei Punktladungen $+q$ und $-q$ liegen auf der z-Achse des Koordinatensystems, wobei $+q$ bei $z = +\frac{1}{2}d$ und $-q$ bei $z = -\frac{1}{2}d$ liegt.

(a) Berechnen Sie das Potential dieses statischen Dipols.

(b) Berechnen Sie eine Näherung für das Potential für große Abstände ($r \gg d$, Fernfeld) und berechnen Sie daraus auch das elektrische Feld dieses Dipols $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für $r \gg d$ ist $\frac{d^2}{r^2} \approx 0$ und für kleine x gilt $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$

Lösung 4.
Das Potential eines elektrischen Feldes ist gegeben durch:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|}$$

(a) Setzt man die beiden einzelnen Potentiale, die von den beiden einzelnen Ladungen entstehen, zusammen, so erhält man:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{d}{2})}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{d}{2})}}\right)$$

was vereinfacht

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+dz+\frac{d^2}{4}}} + \frac{-q}{\sqrt{r^2-dz+\frac{d^2}{4}}}\right)$$

ergibt.

(b) Es gilt

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2(1+\frac{dz}{r^2}+\frac{d^2}{4r^2})}} + \frac{-q}{\sqrt{r^2(1-\frac{dz}{r^2}+\frac{d^2}{4r^2})}}\right)$$

Für $r \gg d$ ist $\frac{d^2}{r^2} \approx 0$ und für kleine x gilt $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$. Damit erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2(1 \pm \frac{dz}{r^2}+\frac{d^2}{4r^2})}} = \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{zd}{2r^2}\right)$$

Somit ist das Potential:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qdz}{r^3}$$

Für das elektrische Feld gilt:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Nebenrechnung:

$$\vec{\nabla}\frac{z}{r^3} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{z}{r^3} = \begin{pmatrix} \frac{z\cdot(-3r^2\cdot\frac{2x}{2r})}{r^4} \\ \frac{z\cdot(-3r^2\cdot\frac{2y}{2r})}{r^4} \\ \frac{z\cdot(1\cdot r^3 - 3r^2\cdot\frac{2z}{2r})}{r^6} \end{pmatrix} = \frac{1}{r^5}\begin{pmatrix} -3zx \\ -3zy \\ -3z^2 + r^2 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\vec{E} = -\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qdz}{r^3} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^5}\begin{pmatrix} 3zx \\ 3zy \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix}$$