Übungen zur Physik für Chemiker II SoSe 21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 4 Lösung

Ausgabe: Mi, 12.05.2021

Aufgabe 1.
Betrachten Sie eine homogen geladene Hohlkugel mit Innenradius R_1 und Außenradius $R_2 > R_1$.
Drücken Sie die Ladungsdichte durch die Gesamtladung Q der Hohlkugel aus.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld E und das elektrische Potential Φ der Hohlkugel (für alle Raumgebiete) mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

(b) Skizzieren Sie den Verlauf von ρ, $\vec{E}$ und Φ als Funktion des Abstandes r vom Mittelpunkt.

Lösung 1.
(a) Ladungsdichte in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \rho_0 \Theta(R_2 - r) \cdot \Theta(r - R_1) \\
Q &= \int \mathrm{d}\Omega \int r^2 \rho \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(R_2^3 - R_1^3\right) \\
\Rightarrow \rho_0 &= \frac{3Q}{4\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}
\end{aligned}$$

Kugelsymmetrie: $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$, deshalb Gaußscher Satz mit Kugel K_r.
Fallunterscheidung: Kugelschale K_r mit $r > R_2 > R_1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_r} \vec{E} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A &= 4\pi r^2 E(r) \\
&= 4\pi \int_{K_r} \rho \mathrm{d}^3 x \\
&= 4\pi Q \\
\Rightarrow E(r) &= \frac{Q}{r^2} \\
\Phi(r) &= \int_r^\infty E(r) \mathrm{d}r = \frac{Q}{r}
\end{aligned}$$

Fallunterscheidung: Kugelschale K_r mit $R_2 > r > R_1$:

$$\begin{aligned}
4\pi r^2 E(r) &= 4\pi \int_{K_r} \rho \mathrm{d}^3 x \\
&= 4\pi\rho_0 \int_{R_1}^{r} r^2 \mathrm{d}r \\
&= 4\pi Q \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \\
\Rightarrow E(r) &= \frac{Q}{r^2} \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \\
\Rightarrow \varPhi(r) &= \int_r^{R_2} E(r)\mathrm{d}r + \varPhi(R_2) \\
&= -\frac{Q}{2} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} - \left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{R_2}\right) \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} + \frac{Q}{R_2}
\end{aligned}$$

Fallunterscheidung: Kugelschale K_r mit $R_2 > R_1 > r$:

$$\begin{aligned}
4\pi r^2 E(r) &= 0 \\
\Rightarrow \varPhi(r) = \varPhi(R_1) &= \frac{3Q(R_1 + R_2)}{2(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)}
\end{aligned}$$

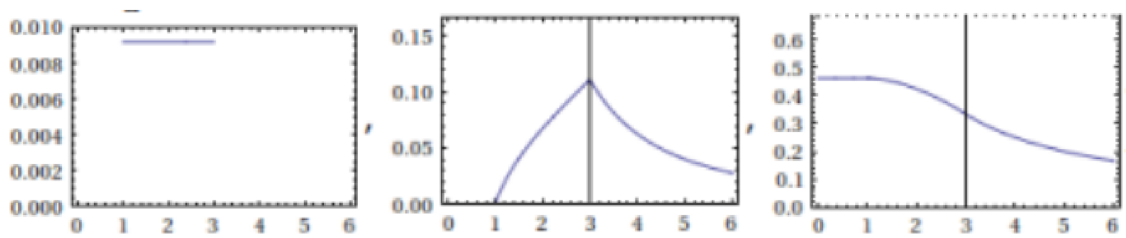
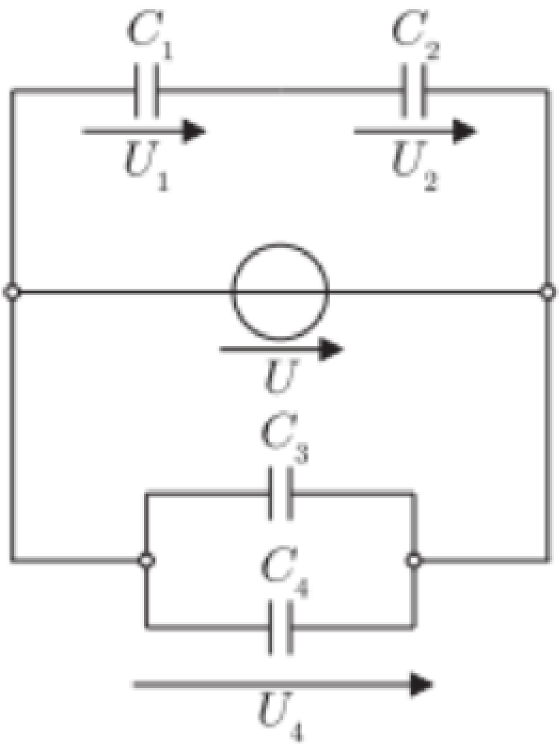


Abbildung 1: Skizze der Ladungsdichte, des E-Feldes und des Potentials (für $R_1 = 1, R_2 = 3$)

(b)

Aufgabe 2.
An der skizzierten Schaltung aus ungeladenen Kondensatoren wird die Gleichspannung $U = 100\,\mathrm{V}$ angelegt.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 4\,\mathrm{nF} \\
C_2 &= 2\,\mathrm{nF} \\
C_3 &= 5\,\mathrm{nF} \\
C_4 &= 1\,\mathrm{nF}
\end{aligned}$$



(a) Ermitteln Sie die Ladung Q_1 bis Q_4 der vier Kondensatoren.

(b) Welche Spannungen U_1, U_2 und U_4 stellen sich ein ?

Lösung 2.

(a) Die in Reihe geschalteten Kondensatoren C_1 und C_2 tragen dieselbe Ladung:

$$Q_1 = Q_2 = U \cdot C_{12}$$

wobei C_{12} die Reihenschaltung C_1 und C_2 bedeutet:

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4\,\mathrm{nF} \cdot 2\,\mathrm{nF}}{4\,\mathrm{nF} + 2\,\mathrm{nF}} = \frac{4}{3}\mathrm{nF}$$

Somit wird:

$$Q_1 = Q_2 = 100\,\mathrm{V} \cdot \frac{4}{3}\mathrm{nF} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{A\,s} = 130\,\mathrm{nC}$$

Die Ladungen von C_3 und C_4 ergeben sich direkt aus der Spannung U:

$$Q_3 = C_3 \cdot U = 5\,\mathrm{nF} \cdot 100\,\mathrm{V} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$$
$$Q_4 = C_4 \cdot U = 1\,\mathrm{nF} \cdot 100\,\mathrm{V} = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

(b) An der Parallelschaltung C_3 mit C_4 liegt die Spannung U:

$$U_4 = U = 100\,\mathrm{V}$$

Die Spannung U_1 ist:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{0{,}13 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{A\,s}}{4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}} = 33{,}3\,\mathrm{V}$$

Somit verbleibt:

$$U_2 = U - U_1 = 66{,}6\,\mathrm{V}$$

Aufgabe 3.
An einen Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 500\,\mathrm{cm}^2$ und dem Plattenabstand $d = 4\,\mathrm{mm}$ im Vakuum wird die Spannung $U = 400\,\mathrm{V}$ angelegt.

(a) Welche Ladung nimmt der Kondensator auf ?

(b) Welche Feldstärke hat das elektrische Feld im Kondensator ?

(c) Wie ändert sich die Ladung und die Feldstärke, wenn der Plattenabstand bei Beibehaltung der Verbindung zur Stromquelle auf 6 mm vergrößert wird ?

(d) Wie ändert sich die Ladung, die Feldstärke und die Spannung, wenn die Vergrößerung des Plattenabstandes nach Abklemmen der Spannungsquelle erfolgt ?

Lösung 3.
(a)

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0 \epsilon_L \frac{A}{d} \\ C &= \frac{Q}{U} \\ \Rightarrow Q &= C \cdot U = \epsilon_0 \epsilon_L \frac{A}{d} \cdot U \\ &= 4{,}43 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E &= \frac{U}{d} \\ &= 100\,000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

(c) Wird die Verbindung zur Spannungsquelle beibehalten, ändert sich die Spannung nicht. Da sich aber durch die Vergrößerung des Plattenabstandes die Kapazität verkleinert, verändern sich auch die Ladungen auf den Platten.

$$\begin{aligned} Q &= \epsilon_0 \epsilon_L \frac{A}{d} \cdot U = 2{,}95 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C} \\ E &= \frac{U}{d} = 66\,666{,}7\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

(d) Wird der Plattenabstand nach dem Abklemmen der Spannungsquelle vergrößert, bleiben die Ladungen auf den Platten erhalten. Damit ändert sich die Spannung zwischen den Platten.

$$Q = \epsilon_0 \epsilon_L \frac{A}{d} \cdot U = 2{,}95 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$$
$$U = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_L A} = 600\,\mathrm{V}$$

Aus der letzten Gleichung ist zu entnehmen, dass U proportional zum Plattenabstand ist. Das heißt, der Quotient aus U und d ist konstant. Das ist aber gerade die Feldstärke, die sich damit nicht ändert.