Übungen zur Physik für Chemiker II SoSe 21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 5 Lösung

Ausgabe: Mi, 19.05.2021

Aufgabe 1.
Zur Messung des Füllstandes eines Heizöltanks wird im Inneren ein Kondensator aus zwei Metallplatten mit je 2 m Höhe und 10 cm Breite montiert. Der Plattenabstand sei $d = 1\,\mathrm{cm}$. Ferner benutze man als numerischen Wert $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C/(V\,m)}$.

(a) Wie groß ist die Kapazität des Kondensators bei

i) leerem Heizöltank

ii) bei einem Füllstand von 1,5 m, wenn für das Heizöl $\epsilon_r = 2.2$ angenommen wird ?

(b) Der Kondensator wird bei leerem Tank an eine Spannungsquelle U_0 angeschlossen. Wie groß sind die Spannung U, die Ladung Q und die Energie W in Abhängigkeit von den Werten für den leeren Tank U_0, Q_0 und W_0 als auch vom Füllstand h, wenn

i) die Spannungsquelle an dem Kondensator angeschlossen bleibt ?

ii) die Spannungsquelle vor dem Füllen entfernt wird ?

Lösung 1.
(a) i) Kapazität ohne Dielektrikum. Es gilt:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}} \frac{2\,\mathrm{m} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}}{0{,}01\,\mathrm{m}} = 177\,\mathrm{pF}$$

wobei A die Fläche des Kondensators und d der Abstand der Platten ist.

ii) Bei partieller Füllung mit einem Dielektrikum verhält sich der gesamte Kondensator wie zwei parallelgeschaltete Kondensatoren. Ein ungefüllter mit einem Viertel der Fläche und ein gefüllter mit drei Viertel der Fläche. Parallelschaltung bei Kondensatoren bedeutet, dass sich die Kapazitäten addieren.

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{4}\epsilon_0 \frac{A}{d} + \frac{3}{4}\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 336{,}3\,\mathrm{pF}$$

i) Spannung konstant:

$$U(h) = U_0$$

Die Kapazität kann analog zu a) wieder als Summe der Kapazitäten eine gefüllten und eines ungefüllten Kondensators berechnet werden. Die Fläche des gefüllten Kondensators in Abhängigkeit von der Füllhöhe ist

$$A_g(h) = \frac{h}{h_{\text{max}}} A$$

mit der maximalen Füllhöhe $h_{\text{max}} = 2\,\text{m}$. Für den ungefüllten Teil erhält man entsprechend

$$A_{\text{leer}}(h) = \left(1 - \frac{h}{h_{\text{max}}}\right) A$$

Für die Gesamtkapazität erhält man

$$C(h) = C_0 \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{\text{max}}}\right)$$

Für die Ladung und Energie erhält man damit:

$$Q(h) = CU = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{\text{max}}}\right) Q_0$$
$$W(h) = \frac{1}{2}CU^2 = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{\text{max}}}\right) W_0$$

ii) Spannungsquelle entfernt, d.h. Ladung konstant:

$$U(h) = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{\text{max}}}\right)^{-1} U_0$$
$$W(h) = \left(1 + (\epsilon_r - 1)\frac{h}{h_{\text{max}}}\right)^{-1} W_0$$

Aufgabe 2.
Ein Kondensator mit der Kapazität $C = 100 \cdot 10^{-6}\,\text{F}$ wird über einen Widerstand von $R = 2{,}2\,\text{k}\Omega$ entladen. Der Kondensator wurde mit einer Spannung von $U_0 = 10\,\text{V}$ aufgeladen. Wie groß ist die Spannung nach $t_1 = 100\,\text{ms}$. Wie lange dauert es, bis die Spannung auf die Hälfte der Ausgangsspannung gesunken ist ?

Lösung 2.
Die Zeitkonstante τ wird zuerst berechnet:

$$\tau = RC = 2200\,\frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{A s}}{\text{V}} = 0{,}22\,\text{s}$$

Für den Entladevorgang gilt:

$$U_C(t_1) = U_0 e^{\frac{-t_1}{\tau}} = 10\,\text{V} \cdot e^{\frac{-0{,}1\,\text{s}}{0{,}22\,\text{s}}} = 6{,}4\,\text{V}$$

Nun nach t umformen:

$$\frac{U_C(t_{\text{halb}})}{U_0} = e^{\frac{-t_{\text{halb}}}{\tau}}$$
$$ln\left(\frac{U_C(t_{\text{halb}})}{U_0}\right) = \frac{-t_{\text{halb}}}{\tau}$$
$$t_{\text{halb}} = -ln\left(\frac{U_C(t_{\text{halb}})}{U_0}\right) \cdot \tau$$
$$t_{\text{halb}} = -ln\left(\frac{5\,\text{V}}{10\,\text{V}}\right) \cdot 0{,}22\,\text{s} = 0{,}15\,\text{s}$$

Aufgabe 3.
Gegeben ist ein Kondensator mit der Kapazität von $C = 47\,\mathrm{nF}$. Dieser wird über einen Widerstand von $R_1 = 270\,\mathrm{k\Omega}$ von einer Spannungsquelle mit $U = 60\,\mathrm{V}$ aufgeladen. Der Ladevorgang wird nach $t_1 = 55\,\mathrm{ms}$ abgebrochen. Daraufhin wird ein Entladevorgang eingeleitet, bei dem der Kondensator über einen Widerstand $R_2 = 82\,\mathrm{k\Omega}$ entladen wird. Berechnen Sie den Entladestrom nach $t_2 = 4\,\mathrm{ms}$.

Lösung 3.
Zeitkonstante τ_1 berechnen:

$$\tau_1 = RC = 270 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot 47 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} = 0{,}0127\,\mathrm{s}$$

Für die Spannung nach 55 ms gilt:

$$U_C(t_1) = U_0 - U_0 e^{\frac{-t_1}{\tau_1}} = 60\,\mathrm{V} - 60\,\mathrm{V} \cdot e^{\frac{-0{,}055\,\mathrm{s}}{0{,}0127\,\mathrm{s}}} = 59{,}21\,\mathrm{V}$$

Zeitkonstante τ_2 für den Entladevorgang berechnen:

$$\tau_2 = RC = 82 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot 47 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} = 0{,}003\,85\,\mathrm{s}$$

Anfangsstromstärke I_0 berechnen:

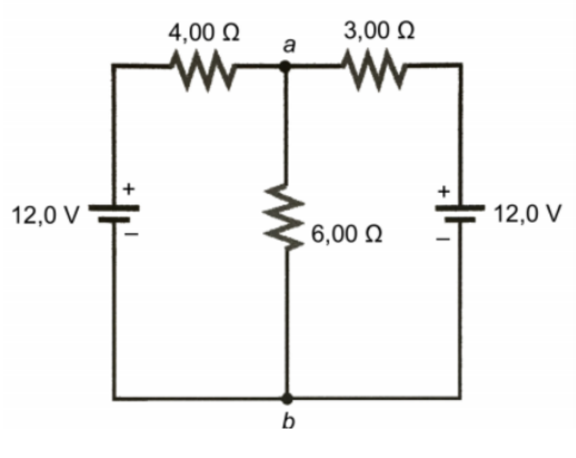
$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{59{,}21\,\mathrm{V}}{82 \cdot 10^3\,\mathrm{V/A}} = 0{,}72\,\mathrm{mA}$$

Stromstärke nach $t_2 = 4\,\mathrm{ms}$:

$$I_C(t_2 = 4\,\mathrm{ms}) = -I_0 \cdot e^{\frac{-t_2}{\tau_2}} = -0{,}72\,\mathrm{mA} \cdot e^{\frac{-4\,\mathrm{ms}}{3{,}85\,\mathrm{ms}}} = -0{,}255\,\mathrm{mA}$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass der Entladestrom entgegengesetzt gerichtet ist zum Aufladestrom, der den Kondensator geladen hat.

Aufgabe 4.
Wir betrachten folgenden Stromkreis:



(a) Berechnen Sie den durch jeden ohmschen Widerstand fließenden Strom.

(b) Bestimmen Sie die elektrische Spannung zwischen den Punkten a und b.

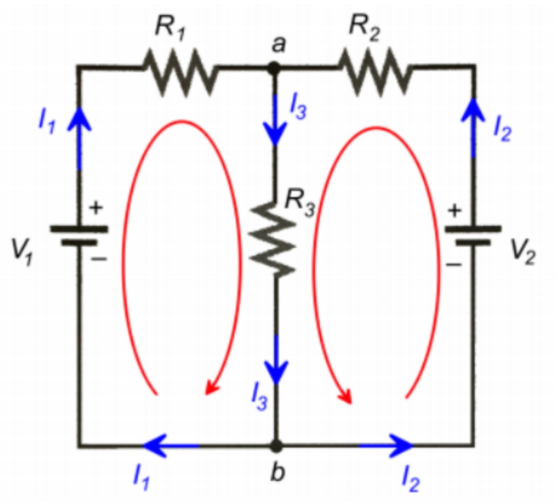
Lösung 4.
Wir legen durch jeden Zweig des Stromkreises eine konventionelle Stromrichtung fest (blaue Pfeile). Danach markieren wir die Richtung, in die wir die einzelnen Maschen durchlaufen werden (rote Pfeile).

(a) Knotenregel am Punkt a:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Maschenregel für die linke Schleife:

$$V_1 - R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 = 0$$



Maschenregel für die rechte Schleife:

$$V_2 - R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = 0$$

Wir setzen die Werte für R_1, R_2, R_3, V_1, V_2 ein und vereinfachen die Gleichungen:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{1}$$
$$2 \cdot I_1 + 3 \cdot I_3 = 6 \tag{2}$$
$$I_2 + 2 \cdot I_3 = 4 \tag{3}$$

Rechne $2 \cdot (1) - (2)$:

$$2 \cdot I_2 - 5 \cdot I_3 = -6 \tag{4}$$

Rechne $2 \cdot (3) - (4)$

$$9 \cdot I_3 = 14 \quad \Rightarrow I_3 = \frac{14}{9} = 1{,}56\,\mathrm{A} \tag{5}$$

Mit (2) ist:

$$I_1 = \frac{1}{2}(6 - 3 \cdot I_3) = \frac{2}{3} = 0{,}667\,\mathrm{A}$$

Mit 17 ist:

$$I_2 = 4 - 2 \cdot I_3 = \frac{8}{9} = 0{,}889\,\mathrm{A}$$

(b) Spannung zwischen a und b:

$$V_{ab} = R_3 \cdot I_3 = 9{,}33\,\mathrm{V}$$