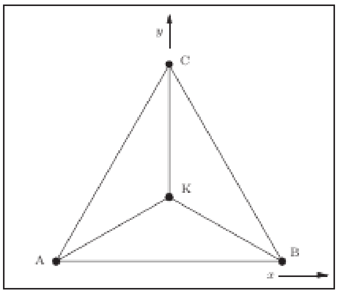
Übungen zur Physik für Chemiker II SoSe 21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 6 Lösung

Ausgabe: Mi, 26.05.2021

Aufgabe 1.
An den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a sitzt je eine negative Ladung q. Im Schwerpunkt K des Dreiecks ruht eine positive Ladung Q (*Atomkern*). Berechnen Sie die Kräfte, sowohl betragsmäßig als auch vektoriell, die auf die negativen Ladungen und auf die positive Ladung wirken.



Lösung 1.
Der Betrag der Kraft die das Elektron im Punkt A auf das Elektron im Punkt C ausübt, ist gegeben durch:

$$F_1 = \frac{kq^2e^2}{a^2}$$

Mit $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.
Die Elektronen im Punkt A und B üben auf das Elektron im Punkt C die Kraft

$$F_2 = 2F_1\cos(30°) = \frac{kq^2e^2\sqrt{3}}{a^2}$$

aus. Der Betrag der Gesamtkraft auf das Elektron im Punkt C ist mit $r = \bar{KC} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ gegeben durch:

$$F_C = F_{Kern} - F_2 = \frac{ke^2}{a^2}(9 - \sqrt{3})$$

Wegen $F_A = F_B = F_C$ ist

$$\vec{F}_A = \frac{F_C}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_B = \frac{F_C}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_C = F_C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.
Die Mittelpunkte zweier identischer, leitender Kugeln sind 140 cm voneinander entfernt. Die Kugeln ziehen sich mit einer Kraft von 0,432 N an. Dann werden sie mit einem leitenden Draht verbunden. Nachdem man den Draht wieder entfernt hat, stoßen sich die Kugeln mit einer Kraft von 0,16 N ab. Wie groß waren anfänglich die Ladungen auf den Kugeln ?

Lösung 2.
Wenn der Draht entfernt wird, haben beide Kugeln diesselbe Ladung. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q' \cdot Q'}{r^2} \\ \Rightarrow Q' &= r\sqrt{F_2 4\pi\epsilon_0} = 5{,}9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

Die Gesamtladung ist im abgeschlossenen Raum erhalten. Somit ist die Gesamtladung:

$$Q' + Q' = 2Q' = 11{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

Man weiß nun, dass die beiden vorherigen Ladungen addiert auch $2Q'$ ergeben müssen.

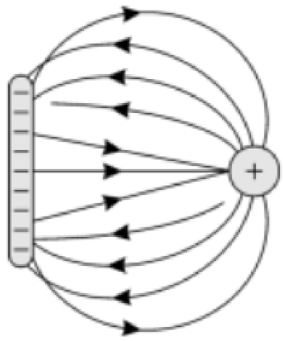
$$Q_1 + Q_2 = 2Q'$$

Stellt man das Kraftgesetz nach Q_1 um, so gilt:

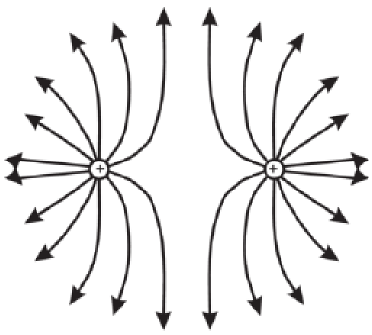
$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{F_1 4\pi\epsilon_0 r^2}{Q_2} \\ \Rightarrow Q_2 - \frac{F_1 4\pi\epsilon_0 r^2}{Q_2} &= 2Q' \\ Q_2^2 - F_1 4\pi\epsilon_0 r^2 &= 2Q'Q_2 \\ Q_2^2 - 2Q'Q_2 - F_1 4\pi\epsilon_0 r^2 &= 0 \\ \Rightarrow Q_{1/2} &= Q' \pm \sqrt{Q'^2 + F_1 4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \Rightarrow Q_1 &= 17{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \\ \Rightarrow Q_2 &= -5{,}46 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.
(a) Zeichnen Sie die Feldlinien für zwei positiv geladene Metallkugeln.

(b) Nennen Sie vier Fehler in dem Feldlinienbild und begründen Sie.



Lösung 3.



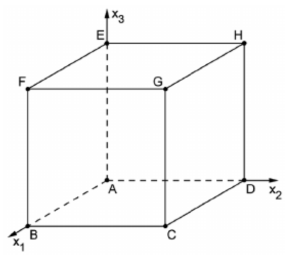
(a)

(b)
- Feldlinien können sich nicht überschneiden, denn an der Kreuzung wäre die Kraftrichtung nicht eindeutig festgelegt. (Sie können sich dagegen ungestört überlagern und dann werden die Kraftpfeile addiert.)
- Feldlinien können nicht im Raum vor dem Leiter enden, weil eine Probeladung nicht vor einem geladenen Körper einfach stehenbleibt. Es wirkt immer eine abstoßende oder anziehende Kraft.
- Feldlinien können nicht schief auf der Leiteroberfläche stehen, weil die Ladungsträger im Leiter so lange an der Oberfläche verschoben werden, bis sich alle Kräfte entlang der Oberfläche ausgleichen.
- Benachbarte Feldlinien können nicht entgegengesetzte Richtungen haben, weil die Kraftrichtung zwischen den beiden Linien dann nicht festgelegt ist.

Aufgabe 4.
Es sei:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix}$$

als Vektorfeld und ein Würfel mit Kantenlänge a als Volumen ($V = a^3$) gegeben.
Verifizieren Sie den Satz von Gauß indem Sie das Volumenintegral und das Flächenintegral ausführen.
Hinweis: Das Flächenintegral muss in mindestens 3 Anteile aufgeteilt werden und bedenken Sie die Integralgrenzen bei der Parametrisierung.



Lösung 4.
Das Volumenintegral:
Das Volumen eines Würfels der Seitenlänge a ist $V = a^3$.
Somit:

$$\iiint_V \mathrm{div}\left(\vec{F}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V (4-2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3a^3$$

Das Flächenintegral:
Das Flächenintegral muss in 3 Teile aufgeteilt werden und für jeden braucht man eine neue Parametrisierung. In der x-y-Ebene ist die Flächennormale in der z-Richtung mit Betrag 1. Nun hat man in dieser Ebene 2 Flächen des Würfels, bei $z = 0$ und $z = a$. Somit sind die 2 Integrale in der x-y-Ebene:

$$I_z = \iint_{z=0} \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{z=a} \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 + a^3 = a^3$$

Für die x-z- und y-z-Ebene muss man das gleiche machen und man bekommt:

$$I_y = \iint_{y=0} \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint_{y=a} \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0 + (-2a^3) = -2a^3$$

$$I_x = \iint_{x=0} \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{x=a} \begin{pmatrix} 4x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 + 4a^3 = 4a^3$$

Wenn man jetzt alle 3 Integrale addiert ergibt sich:

$$I_x + I_y + I_z = 4a^3 - 2a^3 + a^3 = 3a^3$$

Somit ist der Gauß'sche Satz verifiziert.

Aufgabe 5.
Ein Wassermolekül mit dem elektrischen Dipolmoment $|\vec{p}| = 6{,}2 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{A\,s\,m}$ befinde sich in einem elektrischen Feld von $\vec{E} = 1 \cdot 10^6\,\mathrm{V/m}$

(a) Berechnen Sie das maximale Drehmoment des Dipols.

(b) Wie groß ist der Energiegewinn wenn sich das Molekül mit der Anfangsorientierung $\alpha = \measuredangle(\vec{p}, \vec{E})$ beim Einschalten des elektrischen Feldes in dessen Richtung ausrichtet ?

Lösung 5.
(a) Das Drehmoment eines Dipols im elektrischen Feld:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{p} \times \vec{E}\right| = p \cdot E \cdot \sin(\alpha)$$

Das maximale Drehmoment ist dann, wenn $\sin(\alpha) = 1$

$$M_{\mathrm{max}} = p \cdot E = 6{,}2 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{A\,s\,m} \cdot 1 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 6{,}2 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{N\,m}$$

(b) Die potentielle Energie eines Dipols:

$$W_{\mathrm{pot}}(\alpha) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p \cdot E \cdot \cos(\alpha)$$

Die Energie bei Ausrichtung des Dipols in Richtung des elektrischen Feldes ist:

$$W_{\mathrm{pot}}(\alpha = 0) = -p \cdot E$$

Dadurch kann man den Energiegewinn berechnen:

$$W_{\mathrm{pot}}(\alpha) - W_{\mathrm{pot}}(0) = p \cdot E(1 - \cos(\alpha)) = 6{,}2 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J} \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

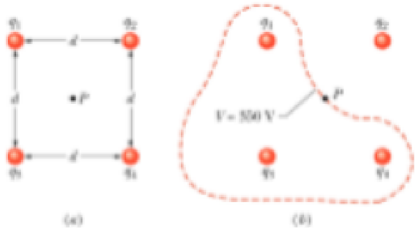
Diese Energiedifferenz wird maximal für $\alpha = \pi$

$$\Delta W_{\mathrm{pot,\,max}} = 12{,}4 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J}$$

Aufgabe 6.

(a) Wie groß ist das elektrische Potential im Punkt P, im Zentrum der quadratischen Anordnung von vier Punktladungen ?
Die Seitenlänge ist $d = 1{,}3\,\mathrm{m}$, die Ladungen betragen $q_1 = 12\,\mathrm{nC}$, $q_2 = 31\,\mathrm{nC}$, $q_3 = -24\,\mathrm{nC}$ und $q_4 = 17\,\mathrm{nC}$.

(b) Was deutet die gestrichelte Linie in der zweiten Abbildung an ?



Lösung 6.

(a) Die Potenzialbeiträge der Einzelladungen addieren sich, wobei die alle den gleichen Abstand $r = \frac{d}{\sqrt{2}}$ zum Punkt P haben.

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{i=1}^{4} V_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r} \\
\Rightarrow V &= \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 d} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \approx 350\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

(b) Es handelt sich um die Äquipotentialfläche geschnitten mit der Papierebene (Bildschirmebene), auf der das elektrische Potential den Wert V aus (a) hat.

Aufgabe 7.

Ein $1\,\mathrm{m}$ langer Eisendraht hat auf der einen Seite einen Durchmesser $d_1 = 1\,\mathrm{mm}$ und verjüngt sich gleichmäßig auf einen Durchmesser $d_2 = 0{,}25\,\mathrm{mm}$ am anderen Ende. Berechnen Sie:

(a) den Gesamtwiderstand des Drahtes mit $\rho_{\mathrm{Eisen}} = 8{,}71 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$

(b) die pro Längeneinheit abfallende Leistung für den Fall, dass an dem Draht eine Spannungsquelle mit $U = 1\,\mathrm{V}$ angeschlossen wird.

Lösung 7.

(a) Wir betrachten das Problem infinitesimal. Der Widerstand dR des Längenelements dx ist gegeben durch:

$$dR = \rho_{\mathrm{el}} \frac{dx}{A(x)}$$

wobei mit $A(x)$ der Querschnitt des Leiters im Punkt x gemeint ist. Eine Parametrisierung des Querschnitts ist:

$$A(x) = \frac{\pi}{4}(d(x))^2 = \frac{\pi}{4}\left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{L}x\right)^2$$

Der Gesamtwiderstand ergibt sich mittels Integration über die gesamte Leiterlänge:

$$R = \frac{4\rho_{\mathrm{el}}}{\pi} \int_0^L \left(d_1 + \frac{d_2 - d_1}{L} x \right)^{-2} dx$$

Wir substituieren $a = d_1$ und $b = \frac{d_2 - d_1}{L}$. Damit folgt:

$$R = \frac{4\rho_{\mathrm{el}}}{\pi} \int_0^L \frac{dx}{(a + bx)^2}$$

Aufintegration und Evaluierung an den Integralgrenzen ergibt

$$R = \frac{4\rho_{\mathrm{el}}}{\pi} \frac{L}{d_1 d_2}$$

Einsetzen der gegebenen Zahlenwerte liefert:

$$R = \frac{4 \cdot 8{,}71 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}}{\pi} \frac{1\,\mathrm{m}}{0{,}25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 0{,}44\,\Omega$$

(b) Bei einer Spannung von $U = 1\,\mathrm{V}$ fließt ein Strom von

$$I = \frac{U}{R} = \frac{1\,\mathrm{V}}{0{,}44\,\Omega} = 2{,}25\,\mathrm{A}$$

Am gesamten Draht fällt die Leistung $P_{\mathrm{el}} = U \cdot I = 2{,}25\,\mathrm{W}$ ab, die sich aber nicht gleichmäßig am ganzen Draht verteilt. Aus $dP_{\mathrm{el}} = I^2 dR$ folgt:

$$P_{\mathrm{el}}(x) = I^2 \rho_{\mathrm{el}} \frac{dx}{A(x)}$$

Die am Draht verheizte Leistung ist demnach umgekehrt proportional zum Querschnitt.