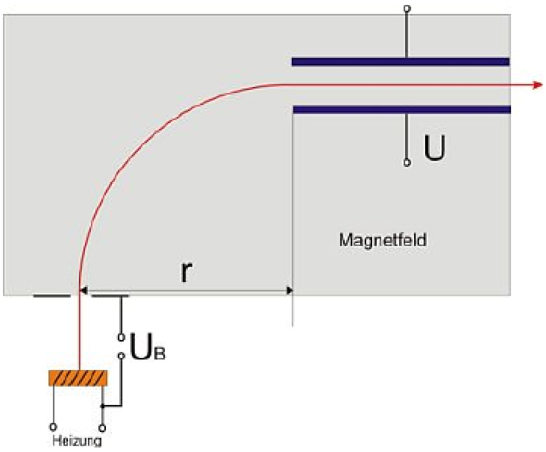
Übungen zur Physik für Chemiker II SoSe 21

Prof. Dr. M. Agio, L. Strauch

Übungsblatt 7 Lösung

Ausgabe: Mi, 02.06.2021

Aufgabe 1.
Elektronen werden durch die Spannung U_B beschleunigt und treten mit der Geschwindigkeit $v_0 = 5{,}9 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$ in ein zur Zeichenebene senkrechtes, homogenes Magnetfeld ein (im Bild grau). Nach Durchlaufen eines Viertelkreises mit 10 cm Radius treten die Elektronen in x-Richtung in einen Plattenkondensator mit 8 cm Plattenabstand ein. Die Anordnung befindet sich im Vakuum.



(a) Berechnen Sie die Größe der Beschleunigungsspannung.

(b) Bestimmen Sie die Flussdichte des Magnetfeldes und geben Sie seine Richtung an. (zur Kontrolle: $B = 0{,}34\,\mathrm{mT}$)

(c) Die Elektronen fliegen mit der oben angegebenen Geschwindigkeit v_0 in den Kondensator hinein. Begründen Sie, warum sich die Geschwindigkeit nicht geändert hat.

(d) Die Spannung zwischen den Kondensatorplatten ist so eingestellt, dass sich die Elektronen geradlinig parallel zu den Platten bewegen. Berechnen Sie die Größe der Spannung zwischen den Platten. Geben Sie die Polung der Spannung an.

(e) Nun wird der Plattenabstand bei konstant gehaltener Spannung U etwas vergrößert. Wie ändert sich dadurch die Bewegung der Elektronen im Kondensator. Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösung 1.

(a) Die Elektronen bekommen ihre kinetische Energie aus der Energie des elektrischen Feldes, dass durch die Beschleunigungsspannung erzeugt wird.

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= E_{\text{el}} \\
\frac{m}{2}v^2 &= eU \\
U &= \frac{m}{2e}v^2 = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \cdot (5{,}9 \cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 99\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

(b) Die Elektronen bewegen sich auf einer Kreisbahn. Das bedeutet, auf sie muss eine Kraft zum Mittelpunkt der Kreisbahn wirken, die Radialkraft. Diese Radialkraft wird von der Lorentzkraft aufgebracht. Das ist die Kraft, die im Magnetfeld auf bewegte Ladungsträger wirkt. Die Lorentzkraft steht immer senkrecht zur Bewegungsrichtung des geladenen Teilchens und zur Richtung des Magnetfeldes. Zur Bestimmung der Richtung des Magnetfeldes wird die Rechte-Hand-Regel verwendet.
Daumen: physikalische Richtung des Stromes, das ist hier direkt die Flugrichtung der Elektronen nach oben.
Zeigefinger: Kraftrichtung auf die Elektronen, hier nach rechts.
Der Mittelfinger zeigt dann in die Ebene des Blattes hinein.
Das Magnetfeld hat auf der Seite des Betrachters den Südpol und in der Blattebene den Nordpol.
Für die Größe der Kraft wird die Lorentzkraft gleich der Radialkraft gesetzt.

$$
\begin{aligned}
F_L &= F_R \\
evB &= \frac{mv^2}{r} \\
B &= \frac{mv}{er} \\
B &= \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}9 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}} = 0{,}34\,\mathrm{mT}
\end{aligned}
$$

(c) Die Elektronen treten in den Kondensator mit der gleichen Geschwindigkeit ein, mit der sie nach der Beschleunigungsstrecke in das Magnetfeld hineinfliegen, sie sind also weder schneller noch langsamer geworden. Die Kraft, die die Elektronen beim Flug durch das Magnetfeld spüren, wirkt immer senkrecht zur Bewegungsrichtung. Damit ändert diese Kraft zwar die Richtung der Geschwindigkeit, kann aber den Betrag nicht ändern. Das würde nur gehen, wenn eine Kraftkomponente in Bewegungsrichtung wirkt.

(d) Die Lorentzkraft wirkt auch im Kondensator auf die Elektronen und zieht sie weiter auf die Kreisbahn. Da sie im Kondensator geradlinig fliegen sollen, muss eine entgegengesetzt gerichtete Kraft wirken. Diese muss in diesem Fall nach oben zeigen. Demnach muss die obere Kondensatorplatte positiv geladen sein und die untere negativ. Für einen geraden Durchflug müssen sich alle Kräfte, die auf das Elektron wirken, aufheben und die resultierende Kraft muss Null sein. Beim Einflug wirkt die Lorentzkraft nach unten. Die Kraft durch das elektrische Feld im Kondensator muss mit der gleichen Größe nach oben wirken.

$$
\begin{aligned}
F_L &= F_{\mathrm{el}} \\
evB &= eE \quad \Rightarrow \quad vB = E \\
E &= \frac{U}{d} \\
vB &= \frac{U}{d} \\
U &= vBd = 5{,}9 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}34 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot 8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 160{,}5\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

(e) Wenn der Plattenabstand vergrößert wird, bleibt die Lorentzkraft unverändert. Wie ändert sich die elektrische Kraft ? Die Kraft durch das elektrische Feld ist

$$F = eE$$

e ist die Ladung des Elektrons und unveränderbar. Wie ändert sich die elektronische Feldstärke ? Sie ist im homogenen Feld des Plattenkondensators

$$E = \frac{U}{d}$$

Damit ist die Kraft

$$F = e\frac{U}{d}$$

Da der Kondensator während der Vergrößerung des Plattenabstandes an der Spannungsquelle bleibt, ist die Spannung ebenfalls unverändert. Es gilt also

$$F \sim \frac{1}{d}$$

Die elektrische Kraft ist bei konstanter Spannung umgekehrt proportional zum Plattenabstand. Wird der Abstand also vergrößert, wird die Kraft auf die Elektronen kleiner. Da die Lorentzkraft aber immer noch mit gleicher Stärke wirkt, fliegen die Elektronen in Richtung der unteren Platte.

Aufgabe 2.

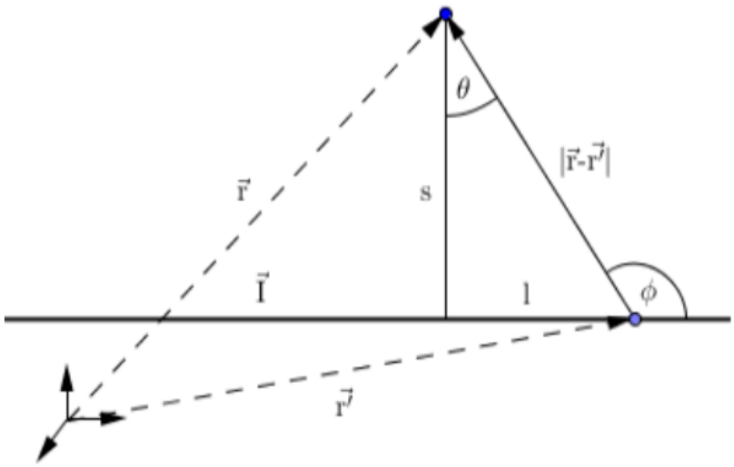
Berechnen Sie das magnetische Feld in Entfernung s von einem sehr langen geraden Draht, durch den ein konstanter Strom I fließt. Nehmen Sie als Idealisierung an, dass der Draht unendlich lang ist.

Lösung 2.

Das Biot-Savart-Gesetz lautet wie folgt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dl$$

Dabei ist $\vec{I}$ der Stromfluss und dl ein infinitesimales Integrationselement entlang des Stromleiters. Man könnte versuchen eine Wegintegration von $-\infty$ bis $+\infty$ durchzuführen, dies ist aber relativ schwierig. Leichter ist es die Wegintegration in eine Integration über den Winkel θ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ umzuschreiben.



Dazu ersetzen wir alle von dem dl-Element abhängigen Terme durch Terme mit θ-Abhängigkeit. Bevor wir dies tun, schreiben wir zuerst das Kreuzprodukt um.
Weil uns nur der Betrag des Magnetfeldes interessiert, ersetzen wir das Kreuzprodukt durch dessen Betrag.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{e}_I \times \vec{e}_{r-r'} |\vec{r} - \vec{r'}|}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dl$$
$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \cdot |\vec{r} - \vec{r'}| \cdot \sin(\phi)}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dl$$

Nach der trigonometrischen Beziehung $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} \pm x)$ kann $\sin(\phi) = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$ als $\cos(\theta)$ geschrieben werden.

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\cos(\theta)}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} dl$$

Betrachtet man das in der Abbildung eingezeichnete Dreieck, so kann man zwei Beziehungen ablesen. Die erste lautet:

$$l = \tan(\theta) s$$

Um l in Abhängigkeit von θ zu bestimmen, berechnen wir die Ableitung von l nach θ.

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{s}{\cos^2(\theta)}$$
$$dl = \frac{s}{\cos^2(\theta)} d\theta$$

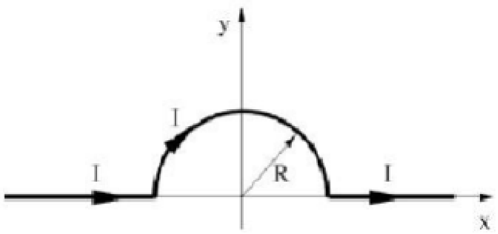
Die zweite Beziehung, die wir aus dem Dreieck ablesen, ist:

$$s = \cos(\theta) |\vec{r} - \vec{r'}|$$
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} = \frac{\cos^2(\theta)}{s^2}$$

Setzen wir diese beiden Beziehungen in das Integral, so vereinfacht sich der Ausdruck bis auf den Kosinus.

$$
\begin{aligned}
B(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\frac{\cos^2(\theta)}{s^2}\frac{s^2}{\cos^2(\theta)}d\theta \\
B(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi s}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)d\theta \\
B(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi s}[\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})] \\
B(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi s}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.
Gegeben sei ein in der xy-Ebene liegender dünner Leiter mit einer halbkreisförmigen Ausbuchtung mit Radius R, durch die ein Strom I fließt (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Stärke des Magnetfeldes im Ursprung mit Hilfe des Biot-Savart'sche Gesetzes. Welche Stärke hätte das Feld im Ursprung, wenn es sich stattdessen um einen Einviertel- bzw Dreiviertel-Kreis handelt ? Diskutieren Sie außerdem den Fall, dass es sich um einen ganzen Kreis handelt. Ist die Berechnung mit der Lösung aus Aufgabe 4 konsistent ?



Lösung 3.
Das Biot-Savart'sche Gesetz besagt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Da wir nur das Feld im Ursprung betrachten, können wir $\vec{r} = 0$ setzen. Für die Gleichung folgt daher:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \times -\vec{r'}}{|\vec{r'}|^3}$$

Da für die geradlinigen Teile des Leiters $d\vec{s} \parallel \vec{r'}$ gilt, tragen sie nicht zu dem Integral bei. Für den halbkreisförmigen Teil des Leiters gilt, dass $d\vec{s} \perp \vec{r'}$, was zur Folge hat, dass man für diesen Teil das Kreuzprodukt durch ein normales Produkt ersetzen kann. Das neue Integral lautet dann:

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s} \cdot -\vec{r'}}{\vec{r'}^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi} d\phi \frac{1}{(r')^2}r' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\pi\frac{1}{r'} = -\frac{\mu_0 I}{4r'}$$

Für r' setzt man dann noch den Radius R des Halbkreises ein und fügt noch den $\vec{e}_z$ Einheitsvektor als Richtung an, da dieser die Richtung des Kreuzproduktes entspricht.
Man erhält als Ergebnis:

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{4R}\vec{e}_z$$

Beim Einviertel-kreis wären die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, deshalb wäre der Betrag des B-Feldes nur halb so groß.
Beim Dreiviertel-Kreis wären die Integrationsgrenzen 0 und $\frac{3\pi}{2}$, deshalb wäre der Betrag des B-Feldes eineinhalb mal so groß.
Beim vollen Kreis wären die Integrationsgrenzen 0 und 2π, deshalb wäre der Betrag des B-Feldes doppelt so groß (was sich in Aufgabe 4 mit $z = 0$ bestätigen lässt).

Aufgabe 4.
In der xy-Ebene liege eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Die Leiterschleife führe einen Strom I und habe den Radius R. Berechnen Sie das Magnetfeld B auf der z-Achse (Symmetrieachse). Nutzen Sie dazu das Biot-Savart'sche Gesetz.

Lösung 4.
Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{r'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Das Magnetfeld soll auf der z-Achse bestimmt werden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Der Ort $\vec{r'}$ der Leiterschleife in Zylinderkoordinaten wird parametrisiert durch:

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r'} = \begin{pmatrix} -R\cos(\varphi) \\ -R\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

und damit $|\vec{r} - \vec{r'}| = (R^2 + z^2)^{3/2}$. Das in φ infinitesimale Wegstück $d\vec{r'}$ ist:

$$\frac{d}{d\varphi}\vec{r'} = \begin{pmatrix} -R\sin(\varphi) \\ R\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man:

$$d\vec{r'} \times (\vec{r} - \vec{r'}) = \begin{pmatrix} Rz\cos(\varphi) \\ Rz\sin(\varphi) \\ R^2(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rz\cos(\varphi) \\ Rz\sin(\varphi) \\ R^2 \end{pmatrix}$$

Nun kann in das Biot-Savart-Gesetz eingesetzt werden und man erhält als Resultat:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} Rz\cos(\varphi) \\ Rz\sin(\varphi) \\ R^2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$