Übungsblatt VI

Was wir mathematisch festlegen, ist nur zum kleinen Teil ein objektives Faktum, zum größeren Teil eine Übersicht der Möglichkeiten.
- Werner Heisenberg

Aufgabe 1

a) Gegeben seien die Vektorfelder

$$\vec{A} = (3x^2 + 2y, -9yz, 8xz^2)$$

und

$$\vec{B} = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$$

Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} d\vec{r}$ und $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{B} d\vec{r}$ zwischen den Punkten $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$ und $\vec{r}_2 = (1, 1, 1)$ jeweils entlang der beiden Wege C_1 und C_2 gegeben durch die Parameterdarstellung

$$C_1 : \vec{r}(t) = (t, t, t)\text{und} \quad C_2 : \vec{r}(t) = (t, t^2, t^4)$$

b) Handelt es sich bei den Feldern in a) um Gradientenfelder? Berechnen Sie die Rotation der beiden Felder.

Aufgabe 2

Ein Körper der Masse m wird am Punkt $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ mit einer Geschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = v_0(\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha))$$

abgeworfen und bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_0 = -mg\vec{e}_z$.

a) Geben Sie $\vec{r}(t)$ an

b) Berechnen Sie die kinetische Energie $E_{kin}(t)$ und die potentielle Energie $E_{pot}(t)$ und deren Summe.

c) Zeichnen Sie die Energien aus b) als Funktion der Zeit t. Benutzen Sie dabei $m = 1Kg$, $v_0 = 20m/s$, $\alpha = 30^{circ}$ und $g = 10m/s^2$.

Aufgabe 3

a) Welche Kraft muss auf einen Massenpunkt der Masse m wirken, damit er sich auf einer Ellipse gemäß

$$\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\vec{e}_x + b\sin(\omega t)\vec{e}_y$$

bewegt?

b) Gibt es zu dieser Kraft ein konservatives Kraftfeld im ganzen Raum ? Wenn ja, berechnen Sie das zugehörige Potenzial.

c) Welche kinetische Energie besitzt der Massenpunkt

d) Welche Gesamtenergie besitzt der Massenpunkt?

Aufgabe 4

a) Gegeben seien die Potenziale

$$V_1(\vec{r}) = (2az^2 + 4bx^3 - 3cy^5) \text{und } V_2(\vec{r}) = ae^{-br^2}$$

mit den Konstanten a, b, c. Berechnen Sie die dazugehörigen Kräfte $\vec{F}_1(\vec{r})$ und $\vec{F}_2(\vec{r})$.

b) Gegeben sei die Kraft $\vec{F}_3(\vec{r}) = A\frac{\vec{r}}{r^3}$ mit der Konstanten A.
Zeigen Sie, dass diese Kraft konservativ ist, und geben Sie das zugehörige Potenzial an

c) Gegeben sei die Kraft

$$\vec{F}_4(\vec{r}) = B(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$$

mit der Konstanten B. Berechnen Sie $\bigtriangledown \times \vec{F}_4(\vec{r})$.

d) Berechnen Sie für $\vec{F}_4(\vec{r})$ das Wegintegral entlang eines geschlossenen Kreises um den Ursprung in der xy-Ebene mit der Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), 0), \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$$

Was fällt Ihnen auf, wenn Sie das Ergebnis mit Teilaufgabe c) vergleichen? Diskutieren Sie das Ergebnis.