

Aufgabe 1

- a) Das Wegintegral über ein Vektorfeld ist definiert als

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Hier ist der Weg γ durch die konkret gegebenen Wege C_1 und C_2 zu ersetzen. Die Wege unterscheiden sich nicht in ihrer Spur sondern lediglich in der Geschwindigkeit in der diese durchlaufen werden.

Für den ersten Weg gilt nach der Parametrisierung $x = y = z = t$. Damit folgt

$$\int_{C_1} \vec{A} d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t \\ -9t^2 \\ 8t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 8t^3 - 6t^2 + 2t dt = 1$$

Für den zweiten Weg gilt

$$\int_{C_2} \vec{A} d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t^2 \\ -9t^6 \\ 8t^9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 4t^3 \end{pmatrix} dt$$

Für das Vektorfeld \vec{B} gilt

$$\int_{C_1} \vec{B} d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2 + t^3 \\ t^2 \\ 3t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

Alle anderen laufen vollständig analog.

- b) Für die Rotation in kartesischen Koordinaten gilt

$$\text{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

Für das Vektorfeld \vec{A} gilt dann

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3x^2 + 2y \\ -9yz \\ 8xz^2 \end{pmatrix}$$

Der andere Teil der Aufgabe ist analog.

Aufgabe 2

- a) Bei diesem Problem handelt es sich um Rekonstruktionsproblem mit Anfangsbedingung. Aus den Newtonschen Gesetzen wissen wir, dass

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{v} = \int \frac{\vec{F}}{m} dt$$

Da wir hier allerdings das unbestimmte Integral bilden, bekommen wir eine a priori unbekannte Integrationskonstante, welche wir allerdings mit Hilfe unserer Anfangsbedingungen bestimmen können.

Es ist

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m} \cdot t + \vec{v}_0$$

und damit

$$\vec{r} = \frac{\vec{F}}{2m} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$$

Einsetzen der Werte liefert

$$\vec{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_0 t \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

b) Die kinetische Energie ist eine skalare Größe. Es gilt

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2}m \left\| \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix} \right\|^2$$

Die potenzielle Energie im Schwerfeld ist gegeben durch $E_{pot} = mgh$, wobei h die Höhe bezeichnet. In diesem Fall ist h durch die z Koordinate zu ersetzen.

Aufgabe 3

a) Gemäß Newton ist

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a} + \vec{v}\dot{m} = m\vec{a}$$

Durch Differenzieren erhalten wir aus der Bahnkurve die Beschleunigung.

$$\vec{a}(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t)\vec{e}_x - b\omega^2 \sin(\omega t)\vec{e}_y$$

Damit folgt

$$\vec{F} = m \cdot \{-a\omega^2 \cos(\omega t)\vec{e}_x - b\omega^2 \sin(\omega t)\vec{e}_y\}$$

Um zu überprüfen, ob es sich um ein konservatives Feld handelt und somit ein Potenzial existiert, muss man die Rotation des Feldes bilden. Damit es ein konservatives Feld ist, muss gelten

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

Da aber hier die Komponenten des Vektors nicht von dem Ort abhängen, ist diese Null. Um das Potenzial zu finden, erinnere man sich an die Relation

$$\vec{F} = -\text{grad}\Phi$$

Durch scharfes Hinsehen erkennt man

$$\Phi = a\omega^2 m \cos(\omega t)x + b\omega^2 m \sin(\omega t)y$$

Aufgabe 4

- a) Wir erhalten die Kräfte durch Bildung der Gradienten mit der Relation

$$\vec{F} = -\text{grad}\Phi$$

Für das erste Potenzial gilt

$$\vec{F} = -\text{grad}\Phi = - \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (2az^2 + 4bx^3 - 3cy^5) = \begin{pmatrix} -12bx^2 \\ 15cy^4 \\ -4az \end{pmatrix}$$

Das zweite ist analog, man beachte nur das $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist.

- b) Hier ist es klug, in Kugelkoordinaten zu transformieren. Für den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Anwendung des Operators auf $A \frac{\vec{r}}{r^3} = A \vec{e}_r \frac{1}{r^2}$ liefert das Ergebnis.

- c,d) Analog wie in Aufgabe 1.