

1 Klassische Integralrechnung

1.1 Stammfunktion

1.1.1 Definition

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$. Gesucht ist eine Funktion $F(x)$ so, dass

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Die Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion. Man spricht auch von dem unbestimmten Integral. Die Suche nach einer Stammfunktion ist also formal das Gegenteil des Differenzierens.

Die Stammfunktion ist nur bis auf eine beliebige Konstante C eindeutig bestimmt. Sei also $F(x)$ eine Stammfunktion. Dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion, da

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

1.1.2 Beispiel

Sei $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = e^x$. Dann gilt:

$$\int f(x)dx = \int \cos(x)dx = \sin(x)$$

$$\int g(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

1.2 Integrationstechniken

1.2.1 Partielle Integration

Die partielle Integration erhalten wir aus der Produktregel beim Ableiten:

$$\frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x)) = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u \Leftrightarrow d(uv) = vdu + u dv$$

Wir sortieren um und integrieren. Man erhält:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

1.2.2 Substitution

Für verschachtelte Integrationen braucht man eine Regel, ähnlich zur Kettenregel beim Ableiten. Wir veranschaulichen dies an einem Beispiel. Was gibt:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x + 1) dx$$

Wir substituieren $y = 2x + 1$ und somit $dx = \frac{1}{2}dy$. Durch einsetzen erhält man:

$$\int_a^b \sin(2x + 1) dx = \int_a^b \frac{1}{2} \sin(y) dy = -\frac{1}{2} \cos(y) \Big|_a^b$$

Die neuen Grenzen ergeben sich durch $a = 2(0) + 1 = 1$ und $b = 2(\frac{\pi}{2}) + 1 = \pi + 1$.

Vektoranalysis

2 Differentialoperatoren

2.1 Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Lh}{\|L\|}$$

Eine Funktion heißt differenzierbar auf U , wenn sie in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist. Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L heißt das Differential oder auch Linearisierung der Funktion f in dem Punkt a und wird mit $df(a)$ bezeichnet.

2.2 Richtungsableitungen

Es sei f eine in a differenzierbare Funktion. Für alle t mit hinreichend kleinem Betrag und $h \in \mathbb{R}^3$ gilt zunächst

$$f(a+th) = f(a) + df(a)th + R(th)$$

wobei der Rest für h wie oben gegen 0 geht.

Sei also $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht notwendiger Weise differenzierbare Funktion in einer Umgebung U von a . Dann versteht man unter der Ableitung von f im Punkt a in Richtung h im Existenzfall den Grenzwert

$$\partial_h f(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Die Ableitungen in Richtung der Standardbasis heißen partielle Ableitungen von f .

2.3 Gradient

Der Gradient ist ein mathematischer Operator, ein Differentialoperator, der auf ein Skalarfeld angewandt werden kann und in diesem Fall ein Gradientenfeld genanntes Vektorfeld liefert. Der Gradient hat zwei anschauliche Eigenschaften. Erstens steht der Gradient senkrecht auf den Höhenlinien und zeigt in die Richtung, in der sich die Funktionswerte am stärksten ändern und zweitens ist der Betrag des Gradienten ein Maß für die Änderung der Funktionswerte senkrecht zu den Höhenlinien. Der Gradient hat in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Darstellungen.

2.3.1 Kartesische Koordinaten

Im \mathbb{R}^3 mit dem euklidischen Standardskalarprodukt ist $gradf(a)$ der Spaltenvektor

$$grad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n$$

Die Einträge $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind die partiellen Ableitungen von f in x_i -Richtung. In drei Dimensionen hat der Gradient also die Darstellung

$$grad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

Betrachte als Beispiel $f(x, y) = 2x^2 - y^2$. Für die partiellen Ableitungen gilt $f_x = 4x$ und $f_y = -2y$. Es gilt also $\text{grad}(f) = \nabla f = 4xe_x + -2ye_y$

2.3.2 Zylinderkoordinaten

Sei V eine Funktion in Zylinderkoordinaten, also von der Form $V = V(\rho, \phi, z)$. Dann gilt für den Gradienten

$$\text{grad}(V) = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} e_\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} e_z$$

2.3.3 Kugelkoordinaten

Sei V eine Funktion in Kugelkoordinaten, also $V = V(r, \theta, \phi)$. Dann gilt für den Gradienten

$$\text{grad}(V) = \nabla V = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi$$

2.4 Divergenz

Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld V ergibt sich über das Skalarprodukt $\nabla \cdot V$ ein skalares Feld, das in jedem Punkt des Raumes angibt, ob dort Feldlinien entstehen oder verschwinden. Am Ort einer positiven Punktladung wäre die Divergenz des elektrischen Feldes beispielsweise größer als Null, da an diesem Ort Feldlinien entstehen. Punkte mit positiver Divergenz werden Quellen genannt, Punkte mit negativer Divergenz werden Senken genannt.

2.4.1 Kartesische Koordinaten

$$\text{div}V(x, y, z) = \nabla \cdot V = \frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z$$

Anmerkung: Im Gegensatz zum elektrischen Feld ist die Divergenz des magnetischen Feldes immer null, da es keine magnetischen Monopole gibt und die Feldlinien deshalb immer geschlossen sind. Diese Tatsache wird durch die Gleichung $\text{div}B = 0$ beschrieben, die eine von den vier Maxwell-Gleichungen ist.

2.5 Rotation

Als Rotation bezeichnet man einen Differentialoperator, der einem Vektorfeld im dreidimensionalen euklidischen Raum mit Hilfe der Differentiation ein neues Vektorfeld zuordnet. Es ist bekannt, dass man Vektoren über ein Skalarprodukt oder ein Vektorprodukt verknüpfen kann. Während man bei der Divergenz Nabla mit einem Vektor über das Skalarprodukt verknüpft, wird bei der Rotation das Vektorprodukt genutzt.

2.5.1 Kartesische Koordinaten

Sei V ein Vektorfeld in kartesischen Koordinaten. Es gilt also $V = V(x, y, z)$. Dann gilt:

$$\text{rot}V(x, y, z) = \nabla \times V = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) e_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) e_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) e_z$$

Anmerkung: Eine andere Weise den Differentialoperator Rotation darzustellen ist über den Levi-Cevita-Tensor. Dieser stellt bei konkreten Berechnungen eine extreme Vereinfachung dar. Für den Levi-Cevita-Tensor gilt:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Perm}(ijk) = 1 \\ -1 & \text{Perm}(ijk) = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit kann man die Rotation schreiben als:

$$\text{rot}(V) = \nabla \times V = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} e_i \partial_j V_k$$

Besonders praktisch ist diese Schreibweise, falls man Identitäten beweisen möchte, z.B den Entwicklungssatz. In der Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren, kann man den Levi-Cevita-Tensor als sogenannte Strukturkonstanten deuten.

2.5.2 Kugelkoordinaten

Gegeben sei ein Vektorfeld V in Kugelkoordinaten, also $V = V(\rho, \theta, \phi)$. Diese kann man auch als Linearkombination

$$V(\rho, \phi, z) = V_\rho e_\rho + V_\theta e_\theta + V_\phi e_\phi$$

Dann gilt für die Rotation:

$$\text{rot}(V) = \nabla \times V = \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\phi \sin(\theta)) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right) e_\rho + \left(\frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial V_\rho}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\phi) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\theta) - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right) \right) e_\phi$$

2.5.3 Zylinderkoordinaten

Gegeben sei ein Vektorfeld V in Zylinderkoordinaten, also $V = V(\rho, \phi, z)$. Diese kann man auch als Linearkombination

$$V(\rho, \phi, z) = V_\rho e_\rho + V_\phi e_\phi + V_z e_z$$

Dann gilt für die Rotation

$$\text{rot}(V) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) e_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) e_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot V_\phi) - \frac{\partial V_\rho}{\partial \phi} \right) e_z$$