

Aufgabe 21

Auf einer geraden Schienenspur mit vernachlässigbarem Widerstand rollt ein durch eine masselose Achse (ohmscher Widerstand R_i) leitend verundenes Radpaar. Senkrecht zur Schienenebene ist ein konstantes Magnetfeld B vorhanden. Jedes Rad habe die Masse m , mit dem Radius r und das Trägheitsmoment Θ , die Spurweite sei b . Die Stromzufuhr erfolge über die Schienen.

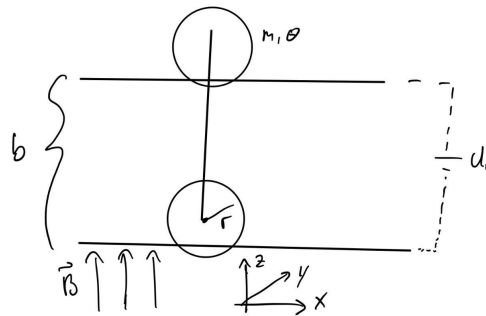
(a) Wie bewegt sich das Radpaar, wenn zur Zeit $t = 0$ die konstante Spannung U_0 zwischen den Schienen angelegt wird? Beachten Sie dabei auch die induzierte Spannung, die bei einer bewegten Leiterschleife im Magnetfeld entsteht.

Tipp: Legen Sie das Koordinatensystem so, dass die x-Achse parallel zu den Schienen, die y-Achse senkrecht zu den Schienen aber parallel zu der Schienenebene und die z-Achse senkrecht zur Schienenebene stehen. Sie können für die Trägheitskraft folgende Formel voraussetzen: $F_T = \Theta\dot{\omega}/r$. Dabei bezeichnet $\omega = \dot{x}/r$ die Winkelgeschwindigkeit und Θ ist das Trägheitsmoment des Systems. Im Verlauf der Lösung tritt eine Differentialgleichung erster Ordnung auf. Nutzen Sie den Ansatz $\dot{x} = A(1 - e^{-\alpha t})$ um diese zu lösen.

(b) Welche Endgeschwindigkeit ($v(t), t \rightarrow \infty$) wird erreicht?

Lösung

zu a): Es spielen hier zwei Effekte eine entscheidende Rolle. (1) Zum einen wirkt auf



den Strom der Achse eine Lorentzkraft, die die Achse beschleunigt und (2) zum anderen wird durch die Bewegung eine Spannung abhängig von der Geschwindigkeit induziert, die die Achse bremst.

(1) Auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge b im homogenen Magnetfeld senkrecht zu den Feldlinien wirkt die Kraft $F_L = bBI(t)$. Hierbei ist der Strom zeitabhängig, da er durch (2) abhängig von der Induktionsspannung ist. Neben der Lorentzkraft wirkt die Trägheitskraft F_T beider Räder. Diese wirkt der Lorentzkraft entgegen und man erhält als Kraft auf die Räder:

$$F = 2m\ddot{x} = F_L - F_T = bBI(t) - 2\Theta\frac{\ddot{x}}{r^2} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{bBI(t)}{2(m + \Theta/r^2)} \quad (1)$$

(2) Wird der Leiter senkrecht zu den Feldlinien eines homogenen Magnetfeldes B bewegt, erfahren die im Leiter mitbewegten Ladungen eine Lorentzkraft F_L . Als Folge davon werden die beweglichen Elektronen verschoben, es kommt längs des Leiters zu einer Verschiebung der Ladungsschwerpunkte (z.B. Überschuss an positiven Ladungen oben, Überschuss an negativen Ladungen unten). Die Ladungsverschiebung bewirkt das Auftreten einer elektrischen Kraft (z.B. auf ein Elektron in der Leitermitte), die umso stärker ist, je mehr Ladungen getrennt wurden. Im stationären Fall, d.h. bei Bewegung des Leiters mit konstanter Geschwindigkeit \dot{x} , halten sich die Lorentzkraft F_L und die elektrische Kraft F_{el} auf ein Elektron die Waage.¹ Es gilt:

$$F_{el} = eE = e\dot{x}B = F_L$$

Zwischen zwei Punkten im Abstand b und elektrischem Feld E herrscht die Spannung $U = bE$. Damit erhält man als sogenannte induzierte Spannung $U_{ind} = b\dot{x}B$. Nach der Lenz'schen Regel wirkt die Induktionsspannung der Spannung U_0 entgegen. Man erhält als gesamtspannung U und dem daraus resultierenden Strom $I(t) = U/R_i$:

$$U = U_0 - U_{ind} = U_0 - b\dot{x}B$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U_0 - b\dot{x}B}{R_i}$$

Eingesetzt in (1) und $\dot{x} := v$ liefert:

$$\ddot{x} = \dot{v} = \frac{bB}{m_{eff}R_i}(U_0 - bBv), \quad m_{eff} = 2(m + \frac{\Theta}{r^2})$$

Dies ist nun eine Differentialgleichung erster Ordnung. Als Ansatz benutzen wir den in der Aufgabenstellung gegebenen:

Ansatz:

$$v(t) = A(1 - e^{-\alpha t}) \Rightarrow \dot{v} = \alpha A e^{-\alpha t}$$

Einsetzen:

$$\alpha A e^{-\alpha t} = \frac{bB}{m_{eff}R_i} [(U_0 - bB)A(1 - e^{\alpha t})]$$

$$= \underbrace{\frac{bB}{m_{eff}R_i}U_0}_{\stackrel{!}{=}0} - \underbrace{\frac{b^2B^2}{m_{eff}R_i}A}_{\stackrel{!}{=}:\alpha} + \frac{b^2B^2}{m_{eff}R_i} A e^{\alpha t}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{U_0}{bB}(1 - e^{\alpha t}), \quad \alpha = \frac{b^2B^2}{m_{eff}R_i}$$

Randbedingung:

$$v(t = 0) = 0 \checkmark$$

¹Leifi Physik: <https://www.leifiphysik.de/elektrizitatslehre/elektromagnetische-induktion>

Damit ist die Lösung gefunden.

zu b): Die Endgeschwindigkeit beträgt:

$$v_{max} := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{U_0}{bB}$$

Aufgabe 22

In der xy-Ebene liege eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Die Leiterschleife führe einen Strom I und habe den Radius R . Berechnen Sie das Magnetfeld B auf der z-Achse (Symmetrieachse). Nutzen Sie dazu das Biot-Savart'sche Gesetz.

Lösung

Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Das Magnetfeld soll auf der z-Achse bestimmt werden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Der Ort \vec{r}' der Leiterschleife in Zylinderkoordinaten wird parametrisiert durch:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

und damit $|\vec{r} - \vec{r}'| = (R^2 + z^2)^{3/2}$. Das in φ infinitesimale Wegstück $d\vec{r}'$ ist:

$$\frac{d}{d\varphi} \vec{r}' = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man:

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} Rz \cos \varphi \\ Rz \sin \varphi \\ R^2 (\underbrace{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}_{=1}) \end{pmatrix}$$

Nun kann in das Biot-Savart'sche Gesetz eingesetzt werden und man erhält als Resultat:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} Rz \cos \varphi \\ Rz \sin \varphi \\ R^2 \end{pmatrix} d\varphi = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Aufgabe 23

In einem langen, dünnen Draht mit Ladungsdichte λ fließe außerdem ein Strom der Stärke I .

a) Zeigen Sie, dass das elektrische und magnetische Feld des Drahtes gegeben ist durch:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r, \quad \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit v muss ein Teilchen der Masse m und Ladung q parallel entlang des Drahtes fliegen, damit der Abstand r zwischen Ladung und Draht konstant ist? Auf welcher Bahn wandert das Teilchen dann am Draht entlang?

Lösung

zu a):

E-Feld:

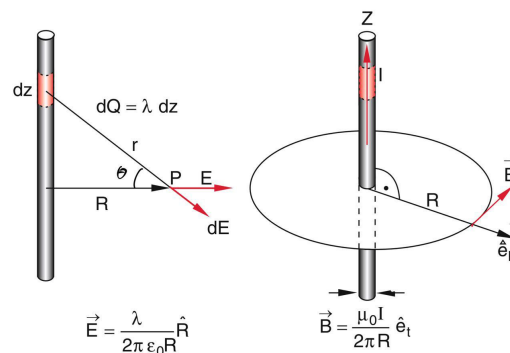


Abbildung 1: Demtröder Ex2 Abb. 3.13 Springer Verlag

Wir wählen das Koordinatensystem, dessen z -Achse mit dem Draht identisch ist. Ein Segment dz des Drahtes trägt die Ladung $dQ = \lambda dz$. Das Feld dE eines solchen Segments am Punkt P hat den Betrag:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{R^2 + z^2}$$

Da der Draht unendlich lang ist, ist die z -Komponente gleich 0, da es gleich große Beiträge von oberhalb und unterhalb des Nullpunktes gibt. Es trägt also nur die radiale Richtung bei. Um im Folgenden über θ integrieren zu können, müssen wir z durch θ ausdrücken $z = R \tan \theta \Rightarrow dz = R d\theta / \cos^2 \theta$, $(R^2 + z^2) = R^2 / \cos^2 \theta$. Mithilfe von $dE_r = dE \cos \theta$ folgt nun durch integration über alle Segmente:

$$E(R) = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Daraus folgt die Behauptung für das E-Feld.

B-Feld:

Da der Draht lang, gerade und zylindrisch ist, erwarten wir aus Symmetriegründen, dass das Magnetfeld in allen Punkten mit gleichem Abstand zu der Achse auch gleich ist. Mit der Rechtenhandregel kann man schnell feststellen, dass das Magnetfeld in tangential zu den um den Draht verlaufenden Kreisen verläuft (siehe Abbildung 1). Um das Magnetfeld zu bestimmen wird nun das Ampere'sche Gesetz verwendet. Dazu wird ein kreisförmiger, konzentrischer Integrationsweg um den Draht (die z-Achse) gewählt. Dann ist der eingeschlossene Strom $I_{eingeschl.} = I$, dem Strom durch den Draht. Damit folgt:

$$\oint \vec{B} \times d\vec{s} = B(2\pi R) = \mu_0 I_{eingeschl.}$$

$$\Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Daraus folgt die Behauptung für das B-Feld.

zu b):

Auf ein Teilchen, dass entlang der z-Achse mit der Geschwindigkeit v fliegt, wirkt die Lorentzkraft F_L :

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass \vec{e}_r in x-Richtung und \vec{e}_φ in y-Richtung zeigt. Dann folgt weiter:

$$\vec{F}_L = q \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_x + v \vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_y \right)$$

Damit der Abstand konstant bleibt, muss $F_L = 0$ und mit $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$ folgt:

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\lambda}{i}$$

Das Teilchen bewegt sich auf einer Geraden mit konstantem Abstand vom Draht.

Aufgabe 24

Um lokal ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen, wird häufig ein sogenanntes Helmholtzspulenpaar verwendet. Dies besteht aus zwei dünnen Ringspulen mit Radien r und der Windungszahl n , die koaxial im Abstand $d = r$ montiert werden.

- i) Nutzen Sie Aufgabe 22 und berechnen Sie damit das magnetische Feld B als Funktion der Position s entlang der Achse dieser Leiteranordnung. Positionieren Sie die Spulen parallel zur xy -Ebene und bei $z = \pm d/2$.
- ii) Welche Feldstärke ergibt sich auf der Achse mittig zwischen den Spulen, wenn die Stromrichtung der beiden Spulen a) parallel und b) antiparallel gewählt wird.
- iii) Warum wird gerade der Abstand $d = r$ gewählt? Entwickeln Sie dazu das B-Feld nach Taylor bis zur einschließlich zweiten Ordnung um $z_0 = 0$.

Lösung

zu i)

Für das B-Feld eines Leiterringes um den Ursprung mit Radius d in der xy -Ebene ergibt sich nach Aufgabe 22 folgende Form:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I d^2}{2(d^2 + z^2)^{3/2}}$$

Das Helmholtzspulenpaar wird nun aus zwei Ringen am Ort $z = \pm d/2$ zusammengesetzt und das Feld superpositioniert:

Feld des ersten Rings:

$$B_1(z) = B(z + d/2)$$

Feld des zweiten Rings:

$$B_2(z) = B(z - d/2)$$

Superpositioniertes Feld:

$$\begin{aligned} B_{ges}(z) &= B_1(z) \pm B_2(z) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} d^2 \left(\frac{1}{(d^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \pm \frac{1}{(d^2 + (z - d/2)^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Bisher wird lediglich das Feld jeweils einer Windung berücksichtigt. Die Spule besteht jedoch aus jeweils n Windungen am Ort einer Leiterschleife. Da die Windungen eng gewickelt werden, kann man in guter Näherung annehmen, dass sie alle am Ort einer Windung platziert werden. Daraus resultiert dann das Feld der Helmholtzspule B_S wieder als Superposition aller n Windungen:

$$B_S = n \cdot B_{ges} = \underbrace{\frac{\mu_0 I n d^2}{2}}_{=: \eta} \left(\frac{1}{(d^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \pm \frac{1}{(d^2 + (z - d/2)^2)^{3/2}} \right)$$

Dabei gilt in der Formel '+', falls die Stromrichtung in den Spulen identisch ist und '-' falls die Stromrichtung der Spulen entgegengesetzt ist.

zu ii):

Im Fall gleicher Stromrichtung ist $B_S^+(0) = \eta \frac{16}{5^{3/2} d^3}$ und im Fall entgegengesetzter Stromrichtung heben sich die Felder gegenseitig auf $B_S^-(0) = 0$.

zu iii): Taylorentwicklung um $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 B_S^+(0) &= \frac{8\mu_0 I n}{5\sqrt{5}d} \\
 \frac{dB_S^+}{dz}(0) &= \eta \left[(-3/2)(d^2 + (d/2 + z)^2)^{-5/2} \cdot 2(d/2 + z) \cdot 1 \right. \\
 &\quad \left. - 3/2(d^2 + (d/2 - z)^2)^{-5/2} \cdot 2(d/2 - z) \right] \Big|_{z=0} \\
 &= 0 \\
 \frac{d^2 B_S^+}{dz^2}(0) &= \eta \left[(-3) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (d^2 + (z + \frac{d}{2})^2)^{-7/2} \cdot 2(\frac{d}{2} + z) \cdot 1(\frac{d}{2} + z) \right. \\
 &\quad \left. - 3 \cdot (d^2 + (z + \frac{d}{2})^2)^{-5/2} \cdot 1 \right. \\
 &\quad \left. - 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (d^2 + (z - \frac{d}{2})^2)^{-7/2} \cdot 2(-\frac{d}{2} + z) \cdot 1 \cdot (z - \frac{d}{2}) \right. \\
 &\quad \left. - 3 \cdot (d^2 + (z - \frac{d}{2})^2)^{-5/2} \cdot 1 \right] \Big|_{z=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Prüft man den Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung, so stellt man fest, dass die Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt besitzt. Da auch die zweite Ableitung gleich Null ist kann man schlussfolgern, dass an dieser Stelle ebenfalls ein Sattelpunkt vorliegt. Daraus folgt, dass die Steigung um das Maximum sehr gering ist, also das Feld um den Ursprung maximal wird und annähernd konstant ist. Dies wird auch im Graph deutlich:

